

Révisions à effectuer pour la rentrée 2021 par les étudiants admis en Classe Préparatoire aux Grandes Ecoles Scientifiques

Nous vous félicitons d'avoir été admis en Classe Préparatoire aux Grandes Ecoles, au lycée Dumont d'Urville. Pour assurer votre réussite et ne pas être en difficulté à la rentrée, il est impératif que vous fassiez sérieusement le travail demandé dans les pages qui suivent.

Ce programme de révisions a été établi par les professeurs que vous aurez à la rentrée. Ils vérifieront donc dès les premiers jours que vous vous êtes bien conformés à leurs prescriptions et avez ainsi mis toutes les chances de votre côté.

Bon courage et bonnes vacances...raisonnablement studieuses.

Le Proviseur-adjoint



Frédéric ALLARD

FRANÇAIS - PHILOSOPHIE

Vous voudrez bien vous procurer et lire les ouvrages suivants pour la rentrée :

- ▶ Aké les années d'enfance de Wole Soyinka (réédition attendue aux éditions Belfond)
- ▶ Emile (Livres 1 et 2) de Jean-Jacques Rousseau
- ▶ Contes d'Andersen, traduction par Marc Auchet (Livre de Poche classique n°16113)

ANGLAIS LV1 et LV2

Les deux années de préparation seront mises à profit pour approfondir vos connaissances linguistiques et vous préparer aux épreuves écrites et orales des concours, qui comprennent essentiellement du thème, de l'expression écrite, de la synthèse de documents et des QCM.

La plupart des textes de ces épreuves sont issus de la presse britannique et américaine. Il est donc important de se tenir au courant de l'actualité et d'acquérir les notions essentielles propres à la civilisation et à la culture des pays anglophones.

En cours, vous travaillerez sur des articles récents abordant des thèmes d'actualité, mais à raison seulement de deux heures par semaine, c'est bien peu; il sera donc **INDISPENSABLE** de prendre l'habitude de lire et de vous cultiver par vous-mêmes. Vous devez également prendre l'habitude de regarder des documentaires (sur Youtube par exemple), les actualités (sur CNN.com par exemple) ou d'écouter des podcasts, tout cela en anglais, bien entendu.

Un programme suivant des thèmes lexicaux ou de civilisation en rapport avec l'actualité sera abordé au cours des deux années, donnant lieu à l'étude ou la révision de points de grammaire et de faits linguistiques essentiels. Des interrogations écrites régulières sanctionneront ces révisions / apprentissages (DS et concours blancs), le tout complété par un entraînement à l'oral grâce aux colles ou "khôlles" (20mn d'interrogation tous les 15 jours).

OUVRAGES OBLIGATOIRES :

Enrichissement lexical :

The Big Picture, vocabulaire de l'actualité en anglais, 4^{ème} édition, de Jean-Max Thomson, Ellipses, avril 2017

Enrichissement grammatical :

Bescherelle, l'Anglais pour tous, de Michelle Malavieille et Wilfrid Rotgé, Hatier, 2014

OUVRAGES RECOMMANDÉS (conseillés, mais pas obligatoires)

Langue et civilisation:

Vous enrichirez vos connaissances grâce au manuel **Clear Essentials** des auteurs Ann Heather & Vincent Demazières (Martorana). Vous y trouverez le minimum vital d'un point de vue grammatical, lexical, ainsi que les bases relatives à la civilisation des pays anglophones.

QUELQUES CONSEILS

Entraînement à l'écrit:

Les journaux et revues de langue anglaise sont des compléments indispensables à la fois pour améliorer et entretenir votre anglais, mieux connaître le monde anglophone et trouver des articles pour les colles. On peut trouver des abonnements pour 6 mois ou plus, individuellement ou à partager à plusieurs. Vous pourrez notamment vous abonner à **Time**, **The Economist**, **The Guardian**. On peut aussi consulter gratuitement certains articles sur les sites internet des journaux (*The Guardian* est ainsi en illimité sur internet) ou magazines (les sites des magazines d'actualité tels que *Time*, mais aussi de vulgarisation scientifique tels que *Wired* et *Popular Science*).

Entraînement à la compréhension de l'oral:

Hormis les séjours linguistiques à l'étranger, un moyen d'immersion profitable aujourd'hui consiste à écouter les radios de langue anglaise par le biais d'internet.

Les sites radio ou TV à conseiller sont notamment **CNN**, **NPR** (Radio publique aux États-Unis), **BBC News**, **Euronews** (avec reportages et scripts en 5 langues), ainsi que le très pratique **Esipod.com**, site californien qui propose des **podcasts** pour les non-anglophones. Parmi les podcasts essentiels, on peut également recommander **BBC Today** et **6 Minute English**. La plupart propose bien sûr des apps.

Il est également vivement conseillé de regarder régulièrement les chaînes de télévision étrangères, notamment pour ce qui est de l'actualité, ainsi que les films, séries ou reportages en version originale sous-titrée ou non

Réussir les épreuves de langues aux concours ne peut se faire que grâce à un « bain » linguistique quotidien d'au **minimum** une quinzaine de minutes, en plus du temps passé en cours ou à faire le travail demandé, afin d'être en mesure de penser et de conceptualiser dans la langue elle-même. Cela peut consister à simplement lire un article de presse, y chercher le vocabulaire, écouter un reportage ou une interview (tirés d'un podcast, d'un des sites web cités plus haut), regarder un épisode de série, ou bien un film, ou encore pratiquer la conversation avec un(e) anglophone. Il faut vous y mettre dès juillet.

ALLEMAND LV1

Le travail de l'année se fera à partir de dossiers regroupant des articles extraits de la presse allemande et française permettant d'étudier les grandes questions d'actualité dans une perspective interculturelle.

Ouvrages imposés :

Bescherelle : **L'Allemand pour tous**, de René Métrich, Anne Larrory-Wunder
Hatier. ISBN 978-2-218-94524-3

Lectures conseillées :

Vocabulaire allemand

L'Allemagne, de Béatrice Angrand

Collection : Idées reçues. Editions Le Cavalier Bleu - ISBN 2 84670 133 4

Sur internet :

Site internet des principaux journaux et magazines allemands (Der Spiegel, Die Zeit, Focus, PM Magazin etc.) et français (Le Monde, Le Point, Le Courrier international, etc.)

Ecouter la radio allemande en podcast. Pour ce faire, télécharger le programme iTunes et s'abonner aux podcasts suivants :

- Das SWR3-Topthema
- Deutsche Welle : Aus Wissenschaft und Forschung
- Deutsche Welle: Top-Thema mit Vokabeln
- Projekt Zukunft: Das Wissenschaftsmagazin
-

Regardez les JT allemands (www.tagesthemen.de , www.heute.de , etc.) et émissions scientifiques (Galileo etc.)

ALLEMAND LV2

La deuxième langue, à raison de deux heures hebdomadaires, est facultative en préparation scientifique. Conserver cette deuxième langue peut néanmoins permettre de gagner de précieux points, sachant que seules les notes au dessus de 10 sont prises en compte ; points qui, additionnés au total obtenu aux épreuves obligatoires, vous assureront un meilleur rang au classement des concours.

L'épreuve de 2^{ème} langue se limite à un QCM d'une heure (compréhension, lexique, grammaire).

Les deux années de préparation aux concours seront donc mises à profit pour vous mettre au niveau des exigences de ces concours.

Les supports de cours utilisés seront : les annales, des textes de la presse germanophone, complétés par des exercices variés portant sur les difficultés grammaticales et lexicales.

ITALIEN LV1 et LV2

L'italien est présent dans toutes les grandes écoles scientifiques à de rares exceptions près.

Se procurer :

- Vocabulaire de l'italien moderne (Pocket)
- Une grammaire italienne
- Un dictionnaire bilingue.

Il est rappelé que la deuxième langue est facultative en préparation scientifique. Chaque année, les candidats qui ont conservé cette deuxième langue ont gagné des places précieuses aux concours (seuls les points au dessus de 10 sont pris en compte et sont ajoutés au total). L'épreuve de 2^{ème} langue se limite à un QCM d'une heure (compréhension, lexique, grammaire).

- Sélectionner quotidiennement une dizaine de mots inconnus en suivant l'ordre du manuel de vocabulaire, **avec la place de l'accent tonique.**
- En grammaire revoir ou étudier les chapitres consacrés aux conjugaisons, aux pronoms personnels, aux pronoms relatifs. **Les formes verbales régulières et irrégulières doivent être parfaitement maîtrisées à la rentrée.**
- Lire régulièrement la presse italienne : la version de Lv1 comme le texte-support du QCM de l'épreuve de Lv2 sont généralement extraits de la presse. Le quotidien *La Repubblica* et l'hebdomadaire *L'Espresso* sont recommandés. On peut les consulter gratuitement sur leurs sites Internet :
<http://www.repubblica.it>
<http://www.espressoedit.kataweb.it>

Document préparatoire pour la rentrée en PCSI

PHYSIQUE – CHIMIE sept. 2021

Bonjour à tous et bienvenue en classe de PCSI !

En classe préparatoire PCSI, les enseignements de physique et de chimie sont assurés par deux professeurs distincts. Néanmoins, les consignes et recommandations qui vont suivre sont valables pour les deux matières.

I Cahier de prépa

La classe fonctionne avec un site internet spécifique, appelé « *cahier de prépa* » dans lequel vous trouverez un très grand nombre d'informations et de documents tout au long de l'année¹. Vous devez **impérativement** et **rapidement** vous y **inscrire** pour pouvoir bénéficier de ce service indispensable :

<https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-toulon/>

Si vous ne le trouvez pas vous devez taper les mots clés : cahier de prepa/pcsi/toulon, pour arriver sur le site.

Quand vous cliquez sur le logo en haut à gauche en forme de livre ouvert pour vous connecter, vous devez demander la création d'un compte. Votre demande sera validée par l'administrateur du site et vous disposerez ainsi des documents mis à votre disposition pendant toute l'année.

Exemple : Si Pierre Dupont demande la connexion, son identifiant sera pdupont. En cas d'oubli du mot de passe, un email lui sera renvoyé sur l'adresse mail donnée à la demande de création de compte.

Le programme de physique chimie en PCSI est conçu pour s'inscrire dans la **continuité** de l'**enseignement de spécialité** de Première et de Terminale.

Un **travail de révisions** s'impose pour commencer l'année de prépa dans les meilleures conditions. Les documents de préparation de la rentrée seront placés sur le cahier de prépa cité ci-dessus.

Un effort tout particulier de **mise à niveau** est demandé aux élèves qui n'auraient pas suivi l'enseignement de spécialité physique/chimie en classe de Terminale. Vous disposez normalement de livres numériques pour cela.

¹ Bien entendu, l'application *ProNote* reste l'outil de référence au niveau administratif.

II Calculatrice

En CPGE il sera fait usage de deux types de calculatrices :

- l'une de type **collège** (avec des fonctions nécessairement très limitées) pour certaines évaluations ;
- l'autre de type **supérieur** (modèle **TI NPIRE CAS CX II recommandé**)

La TI NPIRE CAS CX II se programme en *Python* qui est le langage que vous allez travailler en informatique. Cette calculatrice permet notamment :

- de faire des résolutions numériques d'équations ou de systèmes d'équations (en mode solveur) ;
- de tracer des courbes représentatives de fonctions ;
- de faire des exploitations statistiques de données en mode tableur ;
- de faire des calculs de régression linéaire avec calculs d'incertitudes.

Bien évidemment, ce n'est pas la calculatrice qui fait réussir aux concours² et l'achat de ce modèle précis n'est en aucun cas obligatoire, mais :

- la TI NPIRE CAS CX II sera le modèle pris comme exemple pour les explications données par les professeurs ;
- nous avons négocié avec la société TS PROMOTION un achat groupé à un prix attractif de 124 euros pour cette calculatrice. Si cela vous intéresse, inscrivez-vous sur le lien <https://tinyurl.com/urville21> et effectuez le paiement en ligne. Les calculatrices seront livrées à la rentrée au lycée.

III Matériel nécessaire

En travaux pratiques de chimie, il est obligatoire de revêtir une **blouse en coton avec fermeture par pression** obligatoirement. En cas de problème, la blouse doit pouvoir être enlevée rapidement : la fermeture par bouton n'est donc pas possible.

Rappels des consignes de sécurité en salle de TP : blouse obligatoire, chaussures fermées, cheveux attachés pour celles ou ceux qui ont les cheveux longs, lunettes de sécurité et gants fournis par le laboratoire.

IV Etat d'esprit demandé

Au lycée Dumont d'Urville, nous mettons un point d'honneur à accompagner les élèves dans leur parcours et nous sommes toujours à leur écoute, notamment quand ils traversent des périodes difficiles (c'est assez fréquent...). Nous encourageons fortement le travail en petits groupes. Aux antipodes d'une ambiance concurrentielle, nous prôtons au contraire la mise en place d'un état d'esprit de solidarité et d'entraide afin de faire progresser l'ensemble de l'effectif. Nous rappelons que la mise au travail doit se faire dès la rentrée, que ce travail doit être absolument régulier tout au long de l'année car la réussite est à ce prix !

Bonnes vacances, bonnes révisions et revenez-nous en forme !
vos professeurs de chimie et physique

² Elle est d'ailleurs interdite dans certaines épreuves ou matières.

**CLASSES PRÉPARATOIRES
AUX GRANDES ÉCOLES
SCIENTIFIQUES**

MPSI



PCSI

Passeport pour l'aventure

Première partie : présentation

Passeport pour l'aventure : présentation

23 juin 2021

En sup le début de l'année constitue une période de transition, au cours de laquelle les élèves sont accompagnés dans leur apprentissage du rythme, des méthodes de travail et des exigences d'une classe préparatoire. Pour faire un bilan personnalisé des acquis et besoins de chaque élève, les professeurs de mathématiques de MPSI et PCSI ont prévu de vous faire passer un test le jour de la rentrée, qui portera sur les points fondamentaux du programme de mathématiques de terminale. Pour vous préparer à ce test, les différentes parties de ce document seront mises à votre disposition.

- Cette première partie « présentation », fournit une liste de quelques exercices représentatifs du test de rentrée.
- La deuxième partie « exercices essentiels et rappels de cours » contient d'abord une liste plus exhaustive d'exercices, puis des rappels des principaux résultats et des illustrations des principales méthodes du cours de la spécialité « mathématiques » de terminale.
- Enfin la dernière partie « Exercices d'entraînement et d'approfondissement » peut être abordée dès que vous êtes à l'aise sur tout ce qui précède, pour vous exercer à chercher des exercices demandant un petit peu plus de réflexion et d'initiative personnelle.

Vous trouverez aussi de quoi travailler sur les nombres complexes, qui jouent un rôle non négligeable en classes préparatoires scientifiques, aussi bien en mathématiques qu'en physique chimie et en SI. Que vous les ayez déjà rencontrés en maths expertes ou non, n'hésitez pas à y jeter un oeil !

Les chapitres "Exercices à savoir faire" et "Savoirs et savoir faire" de la deuxième partie se renvoient l'un à l'autre : la succession des thèmes et des sous-thèmes y est identique. Les numéros et les titres des exercices figurant dans le premier document apparaissent dans le second. Ainsi, si vous choisissez de commencer par relire un passage des rappels de cours, vous pouvez tester votre bonne compréhension en cherchant les exercices dont les numéros sont indiqués à la suite de ce passage, et dont l'énoncé se trouvera dans la partie "Exercices à savoir faire". Réciproquement, en cas de difficulté au cours de la recherche d'un exercice de la liste, vous pouvez consulter le paragraphe correspondant dans les rappels de cours, qui contiendra les définitions et propriétés correspondantes, et des exemples de mise en oeuvre des méthodes classiques. Vous pouvez également consulter un paragraphe dans les rappels de cours après avoir fini un exercice de la liste pour vous assurer de la validité des propriétés que vous avez utilisées.

Vous devez au moins d'août reprendre vos cours de mathématiques de terminale, et ces documents sont là pour vous accompagner dans cette démarche. Par contre, il ne vous est pas demandé de chercher tous les exercices qu'ils contiennent.

Passez de bonnes vacances et soyez en forme à la rentrée !

Exemples d'exercices pour un test de rentrée

Les exercices sont indépendants les uns des autres et vous pouvez les traiter dans l'ordre de votre choix. Pour vous permettre de bien vous préparer, la liste ci-dessous est plus longue que le test prévu à la rentrée. Lors du test de rentrée, les calculatrices ne seront pas autorisées.

Exercice 1.

Techniques opératoires

- Développer $A = (x - y^2)(x + y^2)(x^2 + y^4)$.
- Factoriser $B = (x + 1)(y^2 + 2) - y(2x + 2) - (x + 1)$.
En déduire que $B = 0$ si et seulement si $x = -1$ ou $y = 1$.

- (a) Simplifier l'expression de $C = \frac{x + 2}{1 + \frac{1}{x}}$.

- (b) En déduire, sans faire de calcul, une forme simplifiée de $D = \frac{\sqrt{t+1} + 2}{1 + \frac{3}{\sqrt{t+1}}}$ et de

$$E = \frac{\frac{t+3}{3}}{1 + \frac{1}{t+1}}.$$

Exercice 2.

Equations

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

- $\frac{x+1}{x-1} = a$ en fonction $a \in \mathbb{R}$.
On distinguera deux cas pour la valeur de a .
- $x^2 = 3x$.
- $2x^2 - 5x - 3 = 0$.
- $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

Exercice 3.

Inégalités

- On suppose que $2 < x \leq 4$ et que $1 \leq y \leq 3$.
Donner les meilleurs encadrements possibles de $a = x - y$, $b = xy$ et $c = \frac{x}{y}$.
- Déterminer l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $\frac{x+2}{x+1} \leq 1$.
- (a) Déterminer l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $(x-1)^2 \geq 9$.
(b) En déduire l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $x \geq \sqrt{2x+8}$.
- Déterminer le signe de $f(x) = x(|x| - 1)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.**Puissances, logarithme et exponentielle**

1. (a) Exprimer sous forme de produit d'une puissance de a avec une puissance de b la quantité

$$A = \frac{(ab)^2 a^3 b^{-4}}{a^2 b^2 (ab)^{-3}}.$$

- (b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et les relations $u_{n+1} = u_n^3$ pour tout $n \geq 0$.

i. Calculer u_1 et u_2 .

ii. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^{3^n}$.

- (c) Simplifier $B = \frac{\sqrt{10^6}}{1000 + \sqrt{10^2}}$.

2. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $C = \ln(e^3) + \ln(\sqrt{e})$.

(b) $D = e^{-\ln(2) + \ln(4)}$.

3. Résoudre l'inéquation $\ln(1 - x) \leq 0$.

Exercice 5.**Etudes de fonctions**

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - \ln(x + 1)$.

- Déterminer l'ensemble I des réels x tels que $f(x)$ existe.
- Exprimer la dérivée de f et étudier son signe.
- Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine.
- Construire le tableau de variation de f .
- Donner l'équation d'une asymptote à la courbe de f , et préciser les points où la tangente à la courbe de f est parallèle à l'axe des abscisses.
- Dans un repère orthonormé, tracer la courbe de f , l'asymptote et la tangente horizontale.

Exercice 6.**Intégration**

- Déterminer une primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction f définie par $f(x) = 2x^4 - x^2 + \frac{1}{x^2}$.
- Déterminer l'unique primitive sur \mathbb{R} de la fonction g définie par $g(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ qui s'annule en $x = 0$.

3. Calculer la valeur de $I = \int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx$.

4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de $J = \int_1^e t \ln(t) dt$.

Exercice 7.**Réurrences et suites**

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 8 \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 8$.

- Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.
 - Exprimer v_n en fonction de n .
 - En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 8 - 7 \times 2^n$.
 - Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
 - Calculer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.
 - La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle majorée, minorée, bornée ?
2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3 - u_n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
- En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < 1$.
 - Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} , puis exprimer v_{n+1} en fonction de u_n .
 - En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$.
 - En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
3. Exprimer, en fonction de n , sans symbole \sum la valeur de $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{2^k}$.

Exercice 8.**Trigonométrie**

- En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- Déterminer les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\sin(x) = 0$.
 - Déterminer les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
 - En utilisant une formule de trigonométrie, factoriser $A = \sin(x) - \sin(2x)$, puis résoudre l'équation $\sin(x) - \sin(2x) = 0$ dans $[-\pi; \pi]$.

(*Exercice 9.**Exercice facultatif**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1 - 4x)e^{-x}$.

- Etablir les variations de f . Calculer $f\left(\frac{1}{4}\right)$ et $f\left(\frac{5}{4}\right)$.
- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Construire le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .
 - Tracer la courbe de f sur l'intervalle $\left[\frac{-1}{2}; 4\right]$.

On pourra utiliser $f(5/4) \approx -1.15$.

- Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur \mathbb{R} .

5. On note $A(\lambda)$ l'aire comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$ et celle d'équation $x = \lambda$, pour $\lambda \geq \frac{1}{4}$.
- (a) Sur la figure précédente, hachurer le domaine du plan correspondant à $\lambda = 3$.
 - (b) Calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ .
 - (c) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Correction des exemples d'exercices pour un test de rentrée

Exercice 1.

Techniques opératoires

1. Développer $A = (x - y^2)(x + y^2)(x^2 + y^4)$.

$$\begin{aligned} A &= (x - y^2)(x + y^2)(x^2 + y^4) \\ &= (x^2 + xy^2 - xy^2 - y^4)(x^2 + y^4) = (x^2 - y^4)(x^2 + y^4) \\ &= x^4 + x^2y^4 - x^2y^4 - y^8 = x^4 - y^8 \end{aligned}$$

On reconnaît à deux reprises la formule $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, la première fois avec $a = x$ et $b = y^2$ et la seconde fois avec $a = x^2$ et $b = y^4$.

2. Factoriser $B = (x + 1)(y^2 + 2) - y(2x + 2) - (x + 1)$.

En déduire que $B = 0$ si et seulement si $x = -1$ ou $y = 1$.

Avec $2x + 2 = 2(x + 1)$, on remarque que $(x + 1)$ est en facteur dans les 3 termes. On en déduit que

$$B = (x + 1)[(y^2 + 2) - 2y - 1] = (x + 1)[y^2 - 2y + 1] = (x + 1)(y - 1)^2$$

Un produit de deux facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul. Donc $B = (x + 1) \times (y - 1)^2$ vaut 0 si et seulement si $x + 1 = 0$ ou $(y - 1)^2 = 0$, ce qui équivaut à $x = -1$ ou $y = 1$.

3. (a) Simplifier l'expression de $C = \frac{x + 2}{1 + \frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned} C &= \frac{x + 2}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x + 2}{\frac{x + 1}{x}} \\ &= \frac{x + 2}{3} \times \frac{x}{x + 1} = \frac{x(x + 2)}{3(x + 1)} \end{aligned}$$

(b) En déduire, sans faire de calcul, une forme simplifiée de $D = \frac{\sqrt{t+1} + 2}{1 + \frac{1}{\sqrt{t+1}}}$ et de

$$E = \frac{t + 3}{1 + \frac{1}{t + 1}}$$

Pour D : il suffit de poser $x = \sqrt{t + 1}$ pour retrouver l'expression de C . On en déduit que

$$D = \frac{\sqrt{t+1}(\sqrt{t+1} + 2)}{3(\sqrt{t+1} + 1)}$$

De même, en posant $x = t + 1$, on passe de l'expression de E à celle de C . On en déduit que

$$E = \frac{(t+1)(t+1+2)}{3(t+1+1)} = \frac{(t+1)(t+3)}{3(t+2)}$$

Exercice 2.**Equations**

1. Résoudre dans \mathbb{R} $\frac{x+1}{x-1} = a$ en fonction $a \in \mathbb{R}$.

Le quotient $\frac{x+1}{x-1}$ n'a de sens que si $x \neq 1$. On suppose donc $x \neq 1$ dans toute la suite.

Pour tout $x \neq 1$,

$$\frac{x+1}{x-1} = a \iff x+1 = a(x-1) = ax - a \iff (1-a)x = -a-1$$

Attention : on ne peut pas à ce stade diviser par $(1-a)$ sans réfléchir, parce que $(1-a)$ peut valoir 0. On étudie séparément le cas $a = 1$, qui donne $1-a = 0$, et les autres cas : $a \neq 1$.

- Si $a = 1$, alors $(1-a)x = -a-1$ s'écrit $0 = -2$ qui est absurde.

Ceci signifie que quand $a = 1$, l'équation $\frac{x+1}{x-1} = a$ n'a aucune solution x réelle.

- Si $a \neq 1$, alors

$$(1-a)x = -a-1 \iff x = \frac{-a-1}{1-a} = \frac{a+1}{a-1}$$

De plus, $\frac{a+1}{a-1} = \frac{(a-1)+2}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1} \neq 1$.

On conclut que quand $a \neq 1$, l'équation $\frac{x+1}{x-1} = a$ admet une unique solution réelle qui est

$$x = \frac{-a-1}{1-a} = \frac{a+1}{a-1}.$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} $x^2 = 3x$.

Il est inutile (et peu efficace) de passer par le discriminant. Mieux vaut écrire

$$x^2 = 3x \iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul. Donc $x(x-3) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 3$.

Conclusion : l'équation $x^2 = 3x$ admet deux solutions réelles qui sont 0 et 3.

3. Résoudre dans \mathbb{R} $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

On reconnaît une équation polynomiale de degré 2. Utilisons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

- $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{4} = 3$
- $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$

Remarque : On peut en déduire la forme factorisée du trinôme $2x^2 - 5x - 3$, qui est

$$2x^2 - 5x - 3 = 2(x - 3) \left(x + \frac{1}{2} \right) = (x - 3)(2x + 1).$$

4. Résoudre dans \mathbb{R} $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

- Cette équation n'est pas une équation polynomiale. Néanmoins, on remarque que $e^{2x} = (e^x)^2$, et que $e^{2x} - 3e^x + 2 = (e^x)^2 - 3e^x + 2$.
- On commence donc par chercher les solutions de l'équation de degré 2 : $y^2 - 3y + 2 = 0$. On peut utiliser le discriminant, ou bien remarquer que $y = 1$ est une racine évidente, et par factorisation, obtenir $y^2 - 3y + 2 = (y - 1)(y - 2)$. On en déduit que $y^2 - 3y + 2 = 0$ équivaut à $y = 1$ ou $y = 2$.
- On sait maintenant que $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$ équivaut à $e^x = 2$ ou $e^x = 1$. L'équation $e^x = 2$ admet une unique solution réelle qui est $x = \ln(2)$. Et l'équation $e^x = 1$ admet une unique solution réelle qui est $x = \ln(1) = 0$. On conclut que $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ admet exactement deux solutions réelles qui sont 0 et $\ln(2)$.

Exercice 3.

Inégalités

1. On suppose que $2 < x \leq 4$ et que $1 \leq y \leq 3$.

Donner les meilleurs encadrements possibles de $a = x - y$, $b = xy$ et $c = \frac{x}{y}$.

- Pour a :
 $1 \leq y \leq 3$ équivaut à $-3 \leq -y \leq -1$.
 Par somme avec $2 < x \leq 4$, on en déduit que $2 - 3 < x - y \leq 4 - 1$, c'est à dire $-1 < a \leq 3$.
- Pour b :
 $x > 1 > 0$ et $y \geq 1 > 0$ donnent $xy > 1$. De même, $0 \leq x \leq 4$ et $0 \leq y \leq 3$ donnent $xy \leq 12$.
 Donc $1 < b \leq 12$.

Remarque : les calculs ci-dessus utilisent la positivité de x et y . Si on avait $-2 \leq x$ et $3 \leq y$, on ne pourrait pas en déduire que $-6 \leq xy$ (on pourrait avoir $x = -1$ et $y = 12$ par exemple).

- Pour c :
 De $0 < 1 \leq y$ on peut déduire $\frac{1}{y} \leq 1$, et de $0 < y \leq 3$ on peut déduire $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{3}$.
 Comme dans la question précédente, de $0 < 2 < x \leq 4$ et $0 < \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq 1$ on peut déduire par produit que $\frac{2}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{4}{1} = 4$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $\frac{x+2}{x+1} \leq 1$.

On commence par remarquer que le quotient $\frac{x+2}{x+1}$ n'a de sens que si $x \neq -1$. On supposera donc $x \neq -1$ dans toute la suite.

Remarque : Commencer par essayer de multiplier des deux cotés de l'inégalité par $(x+1)$ n'est pas une bonne idée. En effet, on ne connaît pas le signe de $x+1$. Si on veut mettre en oeuvre cette méthode, il est nécessaire de distinguer les deux situations possibles : $x+1 > 0$ et $x+1 < 0$, et de résoudre l'inéquation dans chacun de ces 2 cas.

Il est préférable de se ramener à une étude de signe.

$$\frac{x+2}{x+1} \leq 1 \iff \frac{x+2}{x+1} - 1 \leq 0 \iff \frac{x+2-(x+1)}{x+1} \leq 0 \iff \frac{1}{x+1} \leq 0$$

On sait que, quand $x \neq -1$, $\frac{1}{x+1}$ et $x+1$ ont le même signe. Quand $x \neq -1$, on a donc $\frac{1}{x+1} \leq 0 \iff x+1 \leq 0$.

On conclut que l'ensemble des solutions de $\frac{x+2}{x+1} \leq 1$ est $x < -1$.

3. (a) Déterminer l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $(x-1)^2 \geq 9$.

- Première méthode : par opérations sur les inégalités

On sait que si a et b sont deux réels positifs, alors $a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. Pour $a = (x-1)^2$ et $b = 9$ par exemple (qui sont bien positifs), on obtient

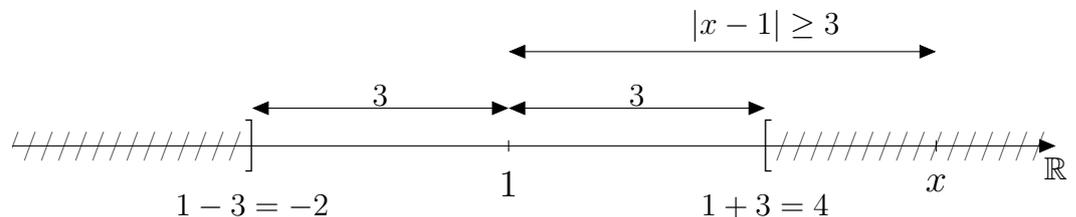
$$(x-1)^2 \geq 9 \iff \sqrt{(x-1)^2} \geq \sqrt{9} = 3$$

Attention : $\sqrt{(x-1)^2} \neq x-1$ en général ! On peut par contre utiliser la valeur absolue pour écrire $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$. Ainsi, $(x-1)^2 \geq 9$ équivaut à $|x-1| \geq 3$.

On sait que $|y| \geq 3$ équivaut à $y \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$, c'est à dire $y \leq -3$ ou $y \geq 3$. On en déduit que $|x-1| \geq 3$ équivaut à $x-1 \geq 3$ ou $x-1 \leq -3$, c'est à dire $x \geq 4$ ou $x \leq -2$.

On conclut que l'ensemble des solutions de $(x-1)^2 \geq 9$ est $] -\infty; -2] \cup [4; +\infty[$.

Remarque : On pourra utilement se souvenir de l'interprétation de la valeur absolue en terme de distance.



- Deuxième méthode : en se ramenant à une étude de signe

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1, \text{ et } (x-1)^2 \geq 9 \text{ équivaut à } x^2 - 2x - 8 \geq 0.$$

A l'aide du discriminant on calcule les deux racines de l'équation $x^2 - 2x - 8 = 0$, et on factorise le trinôme : $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$.

On sait que le trinôme a pour signe le signe du coefficient dominant ($a = 1$ ici) partout sauf entre les racines. On en déduit que $(x+2)(x-4) \geq 0$ si et seulement si $x \leq -2$ ou $x \geq 4$.

(b) En déduire l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation $x \geq \sqrt{2x+8}$.

On commence par remarquer que $\sqrt{2x+8}$ n'a de sens que si $2x+8 \geq 0$, ce qui équivaut à $2x \geq -8$, ou encore à $x \geq -4$. On supposera donc $x \geq -4$ dans toute la suite.

Pour $x \geq -4$, on a $\sqrt{2x+8} \geq 0$. Donc toutes les solutions de $x \geq \sqrt{2x+8}$ sont des réels positifs. On supposera donc $x \geq 0$ dans toute la suite.

On sait que si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a \geq b$ équivaut à $a^2 \geq b^2$. Pour $a = x$ et $b = \sqrt{2x+8}$ qui sont bien positifs, on obtient

$$x \geq \sqrt{2x+8} \iff x^2 \geq 2x+8 \iff x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

On reconnaît le trinôme étudié dans la question précédente. On a montré que $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ si et seulement si $x \leq -2$ ou $x \geq 4$.

On conclut que l'ensemble S des solutions de $x \geq \sqrt{2x+8}$ est constitué de l'ensemble des x réels positifs tels que $x \leq -2$ ou $x \geq 4$, c'est à dire $S = [4; +\infty[$.

4. Déterminer le signe de $f(x) = x(|x| - 1)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

Le signe d'un produit s'étudie à l'aide du signe de chacun des facteurs.

Le signe de x est positif quand x est positif, et négatif quand il est négatif.

Étudions le signe de $|x| - 1$.

On a $|x| - 1 \leq 0$ si et seulement si $|x| \leq 1$, ce qui équivaut à $x \in [-1; 1]$.

On en déduit que

- $|x| - 1$ est négatif si $x \in [-1; 1]$,
- et $|x| - 1$ est positif si $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

On peut s'aider d'un tableau de signes pour conclure.

- Si $x \leq -1$, alors $f(x)$ est négatif,
- si $-1 \leq x \leq 0$, alors $f(x)$ est positif,
- si $0 \leq x \leq 1$, alors $f(x)$ est négatif,
- et si $x \geq 1$, alors $f(x)$ est positif.

Exercice 4.

Puissances, logarithme et exponentielle

1. (a) Exprimer sous forme de produit d'une puissance de a avec une puissance de b la quantité

$$A = \frac{(ab)^2 a^3 b^{-4}}{a^2 b^2 (ab)^{-3}}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(ab)^2 a^3 b^{-4}}{a^2 b^2 (ab)^{-3}} = \frac{a^2 b^2 a^3 b^{-4}}{a^2 b^2 a^{-3} b^{-3}} = \frac{a^{2+3} b^{2-4}}{a^{2-3} b^{2-3}} \\ &= \frac{a^5 b^{-2}}{a^{-1} b^{-1}} = a^5 b^{-2} a^1 b^1 = a^6 b^{-1} = \frac{a^6}{b} \end{aligned}$$

(b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et les relations $u_{n+1} = u_n^3$ pour tout $n \geq 0$.

i. Calculer u_1 et u_2 .

Par définition, $u_1 = (u_0)^3 = 2^3 = 8$.

De même, $u_2 = (u_1)^3 = 8^3 = 2^9 = 512$.

ii. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^{3^n}$.

- Initialisation : pour $n = 0$

On a $u_0 = 2$, et $3^0 = 1$, qui donne $2^{3^0} = 2^1 = 2$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 2^{3^k}$.

Alors, par définition de la suite, $u_{k+1} = (u_k)^3 = (2^{3^k})^3$.

On sait que $(2^x)^3 = 2^{x \times 3} = 2^{3x}$. Pour $x = 3^k$, qui donne $3x = 3^{k+1}$, on obtient $u_{k+1} = 2^{3^k \times 3} = 2^{3^{k+1}}$.

Ainsi la propriété est vérifiée au rang $(k+1)$.

Ceci prouve que la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

(c) Simplifier $B = \frac{\sqrt{10^6}}{1000 + \sqrt{10^2}}$.

$$B = \frac{\sqrt{10^6}}{1000 + \sqrt{10^2}} = \frac{10^3}{1000 + 10^1} = \frac{1000}{1010} = \frac{100}{101}$$

2. (a) Simplifier $C = \ln(e^3) + \ln(\sqrt{e})$.

$$\begin{aligned} C &= \ln(e^3) + \ln(\sqrt{e}) \\ &= 3\ln(e) + \frac{1}{2}\ln(e) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

(b) Simplifier $D = e^{-\ln(2)+\ln(4)}$.

$$D = e^{-\ln(2)+\ln(4)} = e^{\ln(4/2)} = e^{\ln(2)} = 2$$

Autre possibilité :

$$D = e^{-\ln(2)+\ln(4)} = \frac{e^{\ln(4)}}{e^{\ln(2)}} = \frac{4}{2} = 2$$

3. Résoudre l'inéquation $\ln(1-x) \leq 0$.

On sait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et que $\ln(1) = 0$. En particulier $\ln(t) \leq 0$ équivaut à $t \in]0; 1]$.

On en déduit que $\ln(1-x) \leq 0$ équivaut à $0 < 1-x \leq 1$.

D'une part $0 < 1-x$ équivaut à $x < 1$, et d'autre part $1-x \leq 1$ équivaut à $x \geq 0$.

On en déduit que $\ln(1-x) \leq 0$ équivaut à $x \in [0; 1[$.

Exercice 5.

Etudes de fonctions

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Déterminer l'ensemble I des réels x tels que $f(x)$ existe.

On sait que la fonction logarithme népérien \ln est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On en déduit que f est définie sur l'ensemble des x réels tels que $x+1 > 0$, c'est à dire sur l'intervalle $] -1; +\infty[$.

2. Exprimer la dérivée de f et étudier son signe.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -1; +\infty[$, et sa dérivée est

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - 1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

Le signe d'un quotient s'étudie en étudiant le signe du numérateur et celui du dénominateur. On peut s'aider d'un tableau de signes. On trouve que

- Sur l'intervalle $] -1; 0]$, on a $f'(x) \leq 0$, et f est décroissante.
- Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, on a $f'(x) \geq 0$ et f est croissante.

3. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine.

On sait que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$.

- Limite en -1 (à droite) :

On a $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -1^+} -\ln(1+x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - \ln(1+x) = +\infty$.

- Limite en $+\infty$:

On a à la fois $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$. La limite de f en $+\infty$ est donc dans un premier temps indéterminée.

Pour lever l'indétermination, on met en facteur le terme "dominant", ici quand $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = x - \ln(x+1) = x \times \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x}\right)$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. On peut à ce stade envisager au moins deux rédactions.

- Première possibilité : Ecrivons

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, qui donne aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 1} \ln(t) = 0$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0 + 0 \times 0 = 0$.

Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Autre possibilité : Ecrivons

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

On a d'une part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$,

et, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty$, on a d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$.

Par produit, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$.

Comme plus haut, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4. Construire le tableau de variation de f .

Le calcul donne $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$.

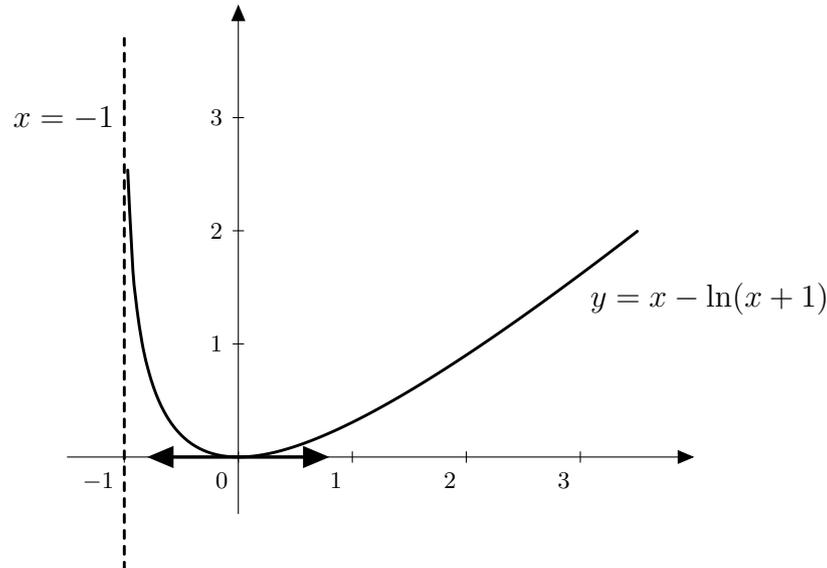
x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	\parallel	$-$	$0 \quad +$
$f(x)$	\parallel	$+\infty$	$\searrow \quad \nearrow$
	\parallel		0

5. Donner l'équation d'une asymptote à la courbe de f , et préciser les points où la tangente à la courbe de f est parallèle à l'axe des abscisses.

La courbe de f admet une asymptote verticale à droite en $x = -1$, qui est la droite d'équation $x = -1$.

La tangente à la courbe de f est parallèle à l'axe des abscisses là où la dérivée de f s'annule. Comme $f'(0) = 0$, la courbe de f admet une tangente au point M de coordonnées $(0, f(0)) = (0, 0)$, qui est la droite d'équation $y = f(0) + f'(0)(x-0) = 0$. Autrement dit, l'axe des abscisses est tangent en l'origine du repère à la courbe de f .

6. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe de f , l'asymptote et la tangente horizontale.



Exercice 6.

Intégration

1. Déterminer une primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction f définie par $f(x) = 2x^4 - x^2 + \frac{1}{x^2}$.

On sait que $(x^5)' = 5x^4$. On en déduit que $(\frac{2}{5}x^5)' = \frac{2}{5} \times 5x^4 = 2x^4$.

De même, $(x^3)' = 3x^2$, et $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$.

Enfin, de $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, on déduit que $(-\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$.

Donc la fonction F définie par $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}$ admet pour dérivée $F'(x) = 2x^4 - x^2 + \frac{1}{x^2} = f(x)$. Autrement dit, F est une primitive de f .

Remarque : Comme vous le savez, une fonction f continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives. Les autres primitives de f sur $I = \mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $F_\alpha : x \mapsto \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + \alpha$, pour tous les $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer l'unique primitive sur \mathbb{R} de la fonction g définie par $g(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ qui s'annule en $x = 0$.

On commence par déterminer une primitive de g sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$. On en déduira ensuite celle qui s'annule en $x = 0$.

On sait que si u est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , alors $f(x) = e^{u(x)}$ est elle aussi dérivable sur \mathbb{R} , et sa dérivée est $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$. On remarque que $g(x)$ est de la forme $u'(x)e^{u(x)}$, pour¹ $u(x) = \sin(x)$. Ainsi, la fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = e^{\sin(x)}$ admet pour dérivée $G'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$, et G est une primitive de g sur \mathbb{R} .

Calculons $G(0)$. On trouve $G(0) = e^{\sin(0)} = e^0 = 1$. La fonction G ne s'annule donc pas en 0. On sait que toutes les autres primitives de g sur \mathbb{R} sont les fonctions $G_\alpha : x \mapsto e^{\sin(x)} + \alpha$, pour tous les $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche donc une valeur de α pour laquelle $G_\alpha(0) = 0$. Le calcul donne $G_\alpha(0) = e^0 + \alpha = 1 + \alpha$. Pour avoir $G_\alpha(0) = 0$, il est donc nécessaire et suffisant de prendre $\alpha = -1$.

1. On rappelle que $\sin'(x) = \cos(x)$.

Conclusion : La fonction G_{-1} , définie sur \mathbb{R} par $G_{-1}(x) = e^{\sin(x)} - 1$ est la primitive de g qui vérifie $G_{-1}(0) = 0$.

3. Calculer la valeur de $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$.

On sait que si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, et si F est une primitive de f sur cet intervalle, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Notons f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$, et cherchons une primitive F de f .

On sait également que si u est une fonction à valeurs strictement positives sur un intervalle I , alors la fonction h définie par $h(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I , et de dérivée $h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

On remarque que $f(x)$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, pour $u(x) = x^2 + x + 1$. Pour tout x appartenant à $I = [0; 1]$, on a $u(x) = x^2 + x + 1 \geq 0 + 0 + 1 > 0$. Ainsi, $F(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ est l'expression d'une fonction F qui est bien définie et dérivable sur $[0; 1]$, et dont la dérivée est $F'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = f(x)$.

Finalement, $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = F(1) - F(0) = \ln(1^2+1+1) - \ln(0^2+0+1) = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3)$.

4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de $J = \int_1^e t \ln(t) dt$.

Il faut commencer par analyser la situation au brouillon, pour comprendre et choisir les deux fonctions utilisées pour l'intégration par parties. Une démarche est rédigée à droite. Ceci n'a pas à figurer dans la réponse rédigée au propre. Une réponse convenable est plus bas.

La fonction $f : t \mapsto t \ln(t)$ est le produit des fonctions $a : t \mapsto t$ et $b : t \mapsto \ln(t)$. Une des deux fonctions a, b sera à dériver et l'autre à intégrer. On commence par essayer la configuration la plus simple. Une primitive de $b : t \mapsto \ln(t)$ n'est pas exigible par coeur d'un élève de Tle. Cette fonction sera dérivée.

Posons $g : \begin{matrix} [1, e] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^2}{2} \end{matrix}$ et $h : \begin{matrix} [1, e] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(t) \end{matrix}$. Ces deux fonctions sont de classe

C^1 sur le segment $[1, e]$. Par conséquent, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_1^e g'(t)h(t)dt = \left[g(t)h(t) \right]_1^e - \int_1^e g(t)h'(t)dt.$$

On sait que, pour tout $t \in [1, e]$, $g'(t) = t$ et $h'(t) = \frac{1}{t}$. Ainsi

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e t \ln(t) dt = \left[\frac{t^2 \ln(t)}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} dt \\ &= \left(\frac{e^2 \times 1}{2} - \frac{1^2 \times 0}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_1^e t dt = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 7.

Récurrences et suites

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 8 \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 8$.

- (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par définition, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 8 \\ &= (2u_n - 8) - 8 = 2u_n - 16 \\ &= 2 \times (u_n - 8) = 2v_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.

- (b) Exprimer v_n en fonction de n .

On en déduit que pour tout $n \geq 0$, $v_n = v_0 \times 2^n$.

Comme $v_0 = u_0 - 8 = 1 - 8 = -7$, on a $v_n = (-7) \times 2^n$ pour tout $n \geq 0$.

- (c) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 8 - 7 \times 2^n$.

Pour tout $n \geq 0$, $u_n = v_n + 8 = -7 \times 2^n + 8$.

- (d) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

On peut procéder de différentes façons. Par exemple :

Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = [8 - 7 \times 2^{n+1}] - [8 - 7 \times 2^n] = 7 \times 2^n - 7 \times 2^{n+1} = 7 \times 2^n \times (1 - 2) = -7 \times 2^n < 0$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

- (e) Calculer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -7 \times 2^n = -\infty$, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (8 - 7 \times 2^n) = -\infty$.

- (f) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée, minorée, bornée ?

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée, et elle n'est donc pas bornée.

Par contre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 8 - 7 \times 2^n \leq 8$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (par 8 par exemple).

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3 - u_n}$. Pour

tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

- (a) En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < 1$.

- Il faut initialiser la récurrence à $n = 1$. Calculons donc u_1 .

$$u_1 = \frac{u_0 + 1}{3 - u_0} = \frac{1}{3}.$$

On a bien $0 < u_1 < 1$ et la propriété est vraie au rang 1.

- Supposons qu'il existe $k \geq 1$ tel que $0 < u_k < 1$.

Alors d'une part $1 < u_k + 1 < 2$,

et d'autre part $-1 < -u_k < 0$ et donc $2 < 3 - u_k < 3$, qui donne $\frac{1}{3} < \frac{1}{3 - u_k} < \frac{1}{2}$.

Par produit, on en déduit que $\frac{1}{3} < \frac{u_k + 1}{3 - u_k} < 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Donc la propriété est vraie au rang $k + 1$.

Ceci prouve que la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

(b) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} , puis exprimer v_{n+1} en fonction de u_n .

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{u_n + 1}{3 - u_n} - 1} = \frac{1}{\frac{u_n + 1 - (3 - u_n)}{3 - u_n}} = \frac{3 - u_n}{u_n + 1 - (3 - u_n)} = \frac{3 - u_n}{2u_n - 2}.$$

(c) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$.

On doit montrer que pour tout $n \geq 0$, $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2}$.

On peut par exemple calculer $v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2u_n - 2} - \frac{u_n - 1}{2u_n - 2} = \frac{3 - u_n}{2u_n - 2} = v_{n+1}$.

On peut aussi écrire

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3 - u_n}{2u_n - 2} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{3 - u_n}{2u_n - 2} - \frac{2}{2u_n - 2} = \frac{1 - u_n}{2u_n - 2} = -\frac{1}{2}$$

Qu'on utilise une méthode ou une autre, on conclut que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$.

(d) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$, on a pour tout $n \geq 0$,

$$v_n = v_0 + n \times \left(-\frac{1}{2}\right) = v_0 - \frac{n}{2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n}{2} = -\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Par ailleurs, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ équivaut à $\frac{1}{v_n} = u_n - 1$, et donc à $u_n = 1 + \frac{1}{v_n}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = 0$, et on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

3. Exprimer, en fonction de n , sans symbole \sum la valeur de $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{2^k}$.

On peut rédiger ce calcul de différentes façons, en fonction des propriétés connues du symbole \sum . A minima, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^2} \times \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right] \\ &= \frac{1}{2^2} \times \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right] \end{aligned}$$

La formule, valable pour tout $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

donne, pour $q = \frac{1}{2}$ et $k = n - 2$,

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{2^2} \times \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)
 \end{aligned}$$

On conclut que $S = \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$.

Exercice 8.**Trigonométrie**

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

L'énoncé nous invite à utiliser la formule de trigonométrie $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ et les valeurs des cosinus et sinus des angles usuels.

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

On procède de même pour le sinus, à l'aide de la formule $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$:

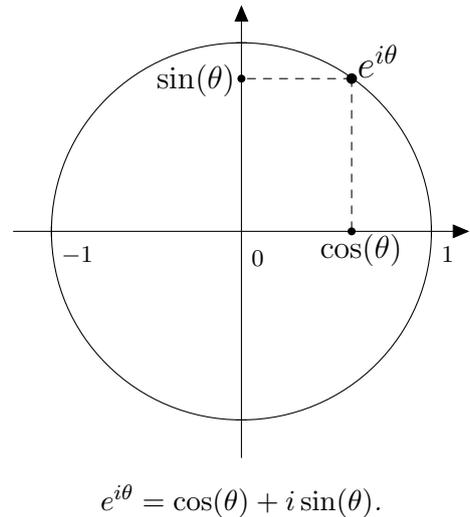
$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

2. (a) Déterminer les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\sin(x) = 0$.

On utilise le cercle trigonométrique.

On voit que $\sin(x) = 0$ si et seulement si $x \equiv 0 [2\pi]$ ou $x \equiv \pi [2\pi]$.

On en déduit que les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\sin(x) = 0$ sont $x = -\pi$, $x = 0$ et $x = \pi$.



- (b) Déterminer les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

On utilise à nouveau le cercle trigonométrique.

On voit que $\cos(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On en déduit que les solutions $x \in [-\pi; \pi]$ de $\cos(x) = \frac{1}{2}$ sont $x = -\frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{\pi}{3}$.

- (c) En utilisant une formule de trigonométrie, factoriser $A = \sin(x) - \sin(2x)$, puis résoudre l'équation $\sin(x) - \sin(2x) = 0$ dans $[-\pi; \pi]$.

- On sait que $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.
On en déduit que $A = \sin(x) - 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(x) \times [1 - 2 \cos(x)]$.
- On sait qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.
On en déduit que $A = 0$ si et seulement si $\sin(x) = 0$ ou $1 - 2 \cos(x) = 0$, c'est à dire si et seulement si $\sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
- Grâce aux questions précédentes, on en déduit que $A = 0$ si et seulement si $x \in \left\{ -\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi \right\}$.

(*Exercice 9.

Exercice facultatif

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1 - 4x)e^{-x}$.

1. Etablir les variations de f . Calculer $f\left(\frac{1}{4}\right)$ et $f\left(\frac{5}{4}\right)$.

- Pour établir les variations d'une fonction, il est classique d'étudier le signe de sa dérivée. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , et sa dérivée est

$$f'(x) = -4 \times e^{-x} + (1 - 4x) \times (-1) \times e^{-x} = e^{-x} \times [4x - 5]$$

(On a utilisé la formule $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.)

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$. Par ailleurs, $4x - 5$ est positif sur l'intervalle $\left[\frac{5}{4}; +\infty\right[$ et négatif sur l'intervalle $]-\infty; \frac{5}{4}]$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty; \frac{5}{4}]$, et f est croissante sur $\left[\frac{5}{4}; +\infty\right[$.

- Calculons :

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = (1 - 1) \times e^{-1/4} = 0$$

et

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = (1 - 5) \times e^{-5/4} = -4e^{-5/4}.$$

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

• On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 4x = +\infty$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$.
Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

• On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 4x = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, la limite de f est donc dans un premier temps indéterminée.

Faisons apparaitre une limite du cours :

$$f(x) = (1 - 4x)e^{-x} = \frac{1 - 4x}{e^x} = e^{-x} - 4 \times \frac{x}{e^x}$$

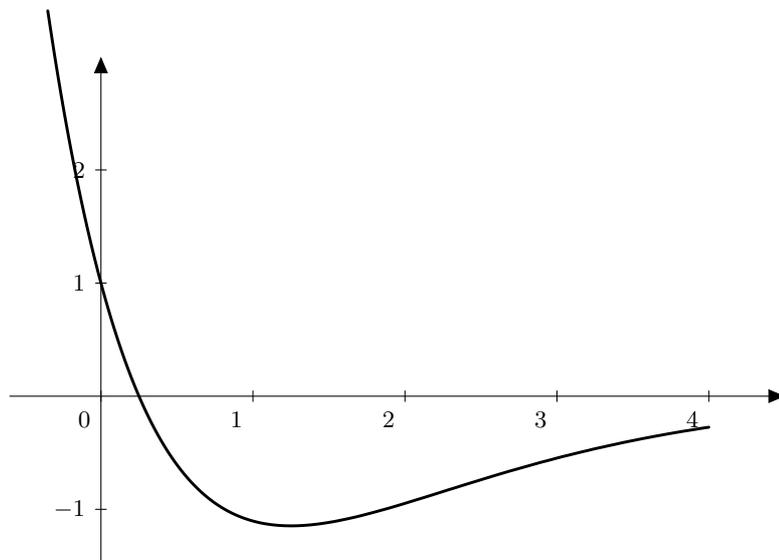
On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3. (a) Construire le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	0	\searrow
			\searrow	\nearrow
			$-4e^{-5/4}$	0

(b) Tracer la courbe de f sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 4\right]$.

On pourra utiliser $f(5/4) \approx -1.15$.



4. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur \mathbb{R} .

On cherche a et b tels que $F'(x) = f(x)$ sur \mathbb{R} .

Calculons la dérivée de F :

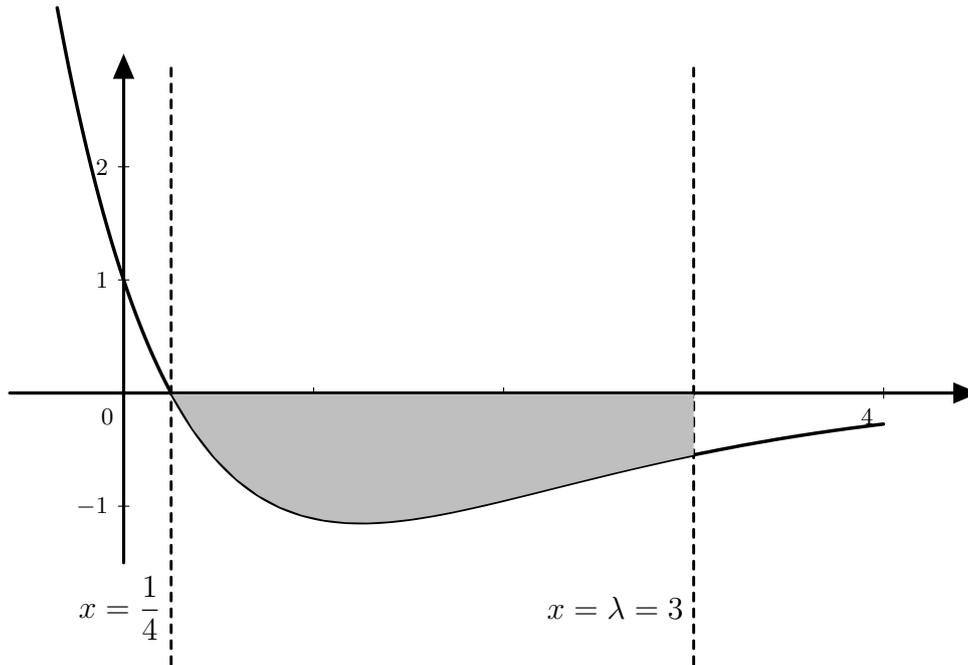
$$F'(x) = a \times e^{-x} + (ax + b) \times (-1) \times e^{-x} = (a - b - ax)e^{-x}$$

Il suffirait donc que $\begin{cases} a - b = 1 \\ -a = -4 \end{cases}$ pour qu'on ait $F' = f$, c'est à dire que $a = 4$ et $b = 3$.

Conclusion : la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (4x + 3)e^{-x}$ est une primitive de f .

5. On note $A(\lambda)$ l'aire comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$ et celle d'équation $x = \lambda$, pour $\lambda \geq \frac{1}{4}$.

(a) Sur la figure précédente, hachurer le domaine du plan correspondant à $\lambda = 3$.



(b) Calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ .

L'intégrale $\int_{1/4}^{\lambda} f(t)dt$ correspond à l'aire au sens algébrique, qui sera ici négative puisque la fonction f est à valeurs négatives sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \lambda\right]$. Si on veut l'aire au sens géométrique, il faut considérer la valeur absolue de cette intégrale.

Calculons l'intégrale

$$\int_{1/4}^{\lambda} f(t)dt = F(\lambda) - F(1/4) = (4\lambda + 3)e^{-\lambda} - (1 + 3)e^{-1/4} = (4\lambda + 3)e^{-\lambda} - 4e^{-1/4}.$$

(c) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Pour $A(\lambda) = (4\lambda + 3)e^{-\lambda} - 4e^{-1/4}$, on a

$$A(\lambda) = 4 \times \frac{\lambda}{e^{\lambda}} + \frac{3}{e^{\lambda}} - 4e^{-1/4}$$

et, comme $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{e^{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^{\lambda}} = 0$, on en déduit que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = -4e^{-1/4}$.

Remarque : L'aire dont la limite est donnée ci-dessus est l'aire au sens algébrique. Si on considère l'aire au sens géométrique, alors la limite est opposée, c'est à dire $4e^{-1/4}$.

**CLASSES PRÉPARATOIRES
AUX GRANDES ÉCOLES
SCIENTIFIQUES**

MPSI



PCSI

Passeport pour l'aventure

Deuxième partie : exercices essentiels et rappels de cours

Table des matières

1 Exercices à savoir faire	5
1.1 Techniques opératoires	6
1.2 Équations	9
1.3 Inégalités, comparaisons et inéquations	10
1.4 Règles de calcul sur les puissances, logarithmes et exponentielles	14
1.5 Études de fonctions	17
1.6 Fonctions usuelles	20
1.7 Intégration	23
1.8 Raisonnement par récurrence et suites numériques	26
2 Savoirs et savoir faire	30
2.1 Techniques opératoires	31
2.2 Équations	37
2.3 Inégalités, comparaisons et inéquations	40
2.4 Règles de calcul sur les puissances, logarithmes et exponentielles	50
2.5 Études de fonctions	59
2.6 Fonctions usuelles	68
2.7 Intégration	79
2.8 Raisonnement par récurrence et suites numériques	86

Chapitre 1

Exercices à savoir faire

1.1 Techniques opératoires

1.1.1 Développer, factoriser

Exercice 1.

Développer un produit

- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 - 3x + 2)(2x + 1) = (x - 1)(2x^2 - 3x - 2)$.
- Montrer que $A(x) = (x + 1)^3 - (x + 2)^3$ est de degré 2.
- Montrer que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Exercice 2.

Factoriser une somme

- Factoriser $A = x(x + 1)^2 - x^2(x + 1)$.
- Factoriser $B = (x + 2)(x^2 + 1) + (2x + 4)(x - 3)$.
- Factoriser $C = (x - 1)(2x + 3) + (1 - x)(x + 4)$.
- Factoriser $D = xy + x + y + 1$.

Chercher un produit de deux facteurs simples.

Exercice 3.

Développer et factoriser, calcul avec des fractions

- Soit $q \in \mathbb{R}$. Développer $A = (1 - q)(1 + q + q^2)$.
- Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}$.
En posant $q = \frac{y}{x}$, déterminer une factorisation de $x^3 - y^3$ de la forme $x^3 - y^3 = (x - y) \times (\dots\dots\dots)$.

1.1.2 Identités remarquables

Exercice 4.

Identités remarquables

- Montrer que $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$.
- (a) Développer $A = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ et factoriser le résultat obtenu.
(b) Factoriser directement A en utilisant la formule $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- Factoriser $B = x^4 - y^4$ en produit de trois facteurs, puis $C = x^4 - 4y^4$ en produit de trois facteurs.

1.1.3 Résolution d'une équation par factorisation

Exercice 5.

Résolution de $f(x) = 0$ par factorisation

- (a) Mettre $(x - 2)$ en facteur dans $A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.
Chercher a, b et c réels tels que $A(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.
(b) En déduire les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $A(x) = 0$.
- (a) Mettre $(x^2 - 1)$ en facteur dans $B(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$.
Chercher a, b et c tels que $B(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$.
(b) En déduire les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $B(x) = 0$.

Exercice 6.**Résolution de $f(x) = 0$ par factorisation**

On cherche l'ensemble S des points M du plan \mathbb{R}^2 dont les coordonnées (x, y) vérifient $(y + 1)^2 - (2x + 3)^2 = 0$.

1. En utilisant une identité remarquable, factoriser la différence $(y + 1)^2 - (2x + 3)^2$.
2. En déduire que S est la réunion des deux droites d'équations $D_1 : y = -2x - 4$ et $D_2 : y = 2x + 2$.

1.1.4 Calculer avec des fractions**Exercice 7.****Calculs de sommes de fractions**

En cherchant le dénominateur le plus simple ou le plus petit possible, calculer les sommes suivantes :

1. $A = \frac{2}{15} + \frac{3}{10}$.

4. $D = \frac{1}{x^2 - x} + \frac{3}{x}$.

2. $B = \frac{7}{12} + \frac{2}{21}$.

5. $E = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{x + 2}$.

3. $C = \frac{2x - 1}{2x + 4} + \frac{x + 2}{3x + 6}$.

Exercice 8.**Sommes et produit de fractions, règles de priorité**

Sans utiliser votre calculatrice, simplifier les expressions suivantes :

1. $A = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right]$

2. $B = 1 + \left(\frac{x}{2} - 1\right) \times \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)\right]$.

Exercice 9.**Simplifications de fractions sur plusieurs niveaux**

Exprimer sous formes de quotients simples les quantités suivantes :

1. $A = \frac{x + 2}{x + \frac{1}{x}}$ et $B = \frac{x - 1}{2x + \frac{1}{3}}$.

2. $C = \frac{1 + \frac{3}{5}}{2 \times \frac{4}{3} + \frac{3}{2}}$ et $D = \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} - \frac{2}{5}}{2 - \frac{2}{5}}$.

3. Mettre sous forme irréductible : $E = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}}$ et $F = \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}$

Exercice 10.**Simplifications de fractions sur plusieurs niveaux**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

1. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{2}{3}\right)$ et $f\left(\frac{3}{4}\right)$.
2. Soit $x \neq 1$. Calculer $f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$.

Exercice 11.**Simplifications de fractions sur plusieurs niveaux**

On pose $f(x) = \frac{4x+2}{x+5}$.

1. Calculer les deux solutions réelles α et β de l'équation $f(x) = x$.
(On choisira $\alpha \leq \beta$).
2. On pose $g(x) = \frac{f(x) - \alpha}{f(x) - \beta} \times \frac{x - \beta}{x - \alpha}$.

Préciser le domaine de définition de g puis vérifier que g est constante sur ce domaine.

1.1.5 Substituer dans une formule

Différents passages de cette sous-section font appels à des notions qui sont révisées dans la suite de ce document.

Exercice 12.**Substitution dans l'expression d'une fonction**

Soient $w \neq 0$ et φ deux réels. On considère la fonction f définie par $f(t) = \cos(wt - \varphi)$, et on pose $T = \frac{2\pi}{w}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

Exercice 13.**Substitution dans l'expression d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(t) = \frac{t}{1+t}$.

Montrer que pour tout $u > 0$, $f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u}f(u)$.

Exercice 14.**Substitution dans une identité remarquable**

a , b , x et y seront supposés réels.

1. Montrer que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
2. En déduire une factorisation de $x^6 - y^9$.

Exercice 15.**Suites et substitutions**

On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = u_{2k}$.

Montrer que la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est arithmétique et déterminer sa raison.

Exercice 16.**Suites et substitutions**

On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^n}{n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = u_{2k+1}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $w_k = u_{2k}$.

1. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} , puis u_{n+2} en fonction de u_n .
2. En déduire une relation entre v_{k+1} et v_k . La suite $(v_k)_{k \geq 0}$ est elle monotone ?
3. De même, déterminer une relation entre w_{k+1} et w_k . La suite $(w_k)_{k \geq 1}$ est elle monotone ?

On rappelle que $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Exercice 17.**Suites définies par récurrence et substitutions**

On considère la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3 - u_n}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = \frac{u_k}{1 - u_k}$.

Montrer que la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

1.2 Équations

1.2.1 Équations du premier degré

Exercice 18.**Des équations du premier degré ou se ramenant au premier degré**

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$1. \frac{x-3}{2} - \frac{6-x}{4} = \frac{2x}{3} - \frac{8x-13}{4}$$

$$2. \frac{(2x-5)(2x+1)}{8} - \frac{(x+3)^2}{6} = \frac{(x-3)x}{3}$$

$$3. (2x+3)(4x+5) - (4x^2-9) + (7x-3)(2x+3) = 0$$

$$4. \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6}$$

1.2.2 Équations du second degré

Exercice 19.**A résoudre de façon simple**

Résoudre dans \mathbb{R} de la manière la plus simple :

$$1. x^2 + (4+x)^2 = 0$$

$$2. x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$3. (4x-1)^2 - 4(x-1)^2 = 0$$

$$4. (3x+1)^2 + 2(3x+1) + 1 = 0$$

$$5. x^2 - 16 + 2(x-4) = 0$$

Exercice 20.**Des équations qui se ramènent à des équations de degré 2**

Résoudre dans \mathbb{R} :

1. $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

2. $2x^2 - 3|x| + 1 = 0$

3. $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$

4. $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

5. $\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - 1 = 0$

6. $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} - 4 = 0$

7. $\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{2x-1}\right) - \frac{3}{4} = 0$

Pour des rappels sur les valeurs absolues, les racines carrées, et les fonctions trigonométriques \cos et \sin , vous pouvez consulter les parties correspondantes du document "Savoirs et savoir faire".

1.2.3 Équations polynomiales de degré supérieur à 2**Exercice 21.****Equations polynomiales de degré supérieur ou égal à 3**

1. On considère l'équation $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

(a) Vérifier que $x = 1$ est solution.

(b) En déduire l'ensemble des solutions réelles.

2. (a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$.

(b) En déduire l'ensemble des solutions réelles de $t^4 + 3t^2 - 10 = 0$.

3. Soit $P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$.

(a) Vérifier que 2 est racine de P .(b) Factoriser P sous la forme $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.(c) En déduire les solutions de $P(x) = 0$.

4. Résoudre, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + \frac{1}{x^n} = 2$, en discutant suivant les valeurs de n .

1.3 Inégalités, comparaisons et inéquations**1.3.1 Règles de calcul sur les inégalités****Exercice 22.****Produits d'inégalités**

Soit $f(x) = x \times (1 - x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \geq 0$.

2. Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

3. Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 23.**Sommes, produits et quotients d'inégalités**

On suppose que $-1.12 \leq u \leq -1.118$ et que $-4.111 \leq v \leq -4.11$.

Donner les meilleurs encadrements possibles de $a = u - v$, de $b = uv$, et de $c = \frac{u}{v}$.

Exercice 24.**Passage à l'inverse, quotients**

On rappelle que pour tout x réel, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

1. Montrer que pour tout x réel, $\frac{1}{5} \leq \frac{2 - \sin(x)}{2 \cos(x) + 3} \leq 3$.

2. Montrer que pour tout x réel, $-1 \leq \frac{1 - 2 \sin(x)}{2 \cos(x) + 3} \leq 3$.

Exercice 25.**Inégalités strictes**

On suppose que $\frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Donner les meilleurs encadrements possibles de $A = 3x - 7$, de $B = -9x + 2$, de $C = x^2$, de $D = \frac{1}{1+x}$, de $E = \frac{1}{1-x^2}$ et de $F = \frac{x}{1-x^2}$.

Exercice 26.**Comparaisons et carrés**

Sans utiliser votre calculatrice, déterminer lequel des deux nombres $a = 2\sqrt{6}$ et $b = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ est plus grand que l'autre.

Exercice 27.**Elever une inégalité au carré**

Une erreur s'est glissée dans le raisonnement suivant (en italique). Saurez-vous la trouver ?

On cherche à déterminer l'ensemble des x réels tels que $x^2 \leq 1$.

La fonction racine carrée étant croissante, l'inéquation $x^2 \leq 1$ est équivalente à $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{1}$, c'est à dire à $x \leq 1$. Donc l'ensemble des solutions de $x^2 \leq 1$ est $S =]-\infty; 1]$.

Si ce raisonnement était vrai, alors pour $x = -2$, qui vérifie bien $x \leq 1$, on aurait $x^2 \leq 1$. Mais $(-2)^2 = 4$ et 4 n'est pas inférieur ou égal à 1. Donc le raisonnement en italique ne peut pas être correct.

Exercice 28.**Elever une inégalité au carré**

Le raisonnement en italique ci-dessous est-il correct ?

On cherche l'ensemble des solutions de $x + \sqrt{3-x} \leq 1$.

• $\sqrt{3-x}$ existe si et seulement si $3-x \geq 0$, dont les solutions sont à chercher parmi les $x \leq 3$.

• $x + \sqrt{3-x} \leq 1$ équivaut à $\sqrt{3-x} \leq 1-x$, qui équivaut à $3-x \leq (1-x)^2$.

Comme $(1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$, $3-x \leq (1-x)^2$ équivaut à $0 \leq x^2 - x - 2$.

• On factorise le trinôme : $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Le signe du trinôme est celui de $a = 1$ sauf entre les racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$, donc

$x^2 - x - 2 \geq 0$ équivaut à $x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$.

• Conclusion : $x + \sqrt{3-x} \leq 1$ si et seulement si $x \in]-\infty; -1] \cup [2; 3]$.

Exercice 29.**Elever une inégalité au carré**

1. Résoudre $\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{x(2-x)}$, d'inconnue $x \in [-1; 1]$.
2. Résoudre $\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x+2} \geq 0$.
3. On cherche les solutions de $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$.
 - (a) Déterminer l'ensemble des $x \leq 1$ tels que $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$.
 - (b) Déterminer l'ensemble des $x \geq 1$ tels que $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$.

1.3.2 Valeur absolue**Exercice 30. Résoudre une équation ou une inéquation avec des valeurs absolues**

1. Résoudre l'équation $|t + 2| = 4$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'inéquation $|t - 3| \geq 1$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre la double inéquation $1 \leq |t - 1| \leq 2$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 31. Résoudre une équation ou une inéquation avec des valeurs absolues

1. Résoudre l'équation $|x - 1| = |x - 3|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'inéquation $|x - 1| \leq |x - 3|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'inéquation $||t| - 1| \leq 1$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 32.**Sommes, différences d'inégalités et valeur absolue**

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$.
Montrez le pour tout $x \geq 0$ dans un premier temps, puis pour tout $x \leq 0$ dans un second temps.
2. En déduire que pour tout x et y réels, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Exercice 33.**Opérations algébriques et valeurs absolues**

Démontrer que si $|x - 2| \leq 10^{-2}$, alors $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| \leq 3 \times 10^{-3}$.

1.3.3 Signe d'une somme, d'un produit, d'un quotient**Exercice 34.****Etude du signe d'une différence**

On considère $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]0; 1[$.

1. Montrer que $f(x)$ est du signe de $g(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x(2-x)}$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de $f(x) \geq 0$, d'inconnue $x \in]0; 1[$.

Exercice 35.**Etudier le signe d'un produit, d'un quotient**

- Déterminer le signe de $e^u - 1$ en fonction de $u \in \mathbb{R}$.
- On pose $u = x^2 - 5x + 6$. Montrer que $u \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$.
- En déduire le signe de $f(x) = \frac{e^{x^2-5x+6} - 1}{\ln(x+2)}$ sur son domaine de définition.

Exercice 36.**Comparaisons**

Sans utiliser votre calculatrice et en justifiant votre réponse avec un minimum de calculs, ranger par ordre croissant les nombres $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{3}{4}$, $d = \frac{4}{5}$, $e = \frac{5}{6}$ et $f = \frac{6}{7}$.

Exercice 37.**Se ramener à une étude de signe**

- Résoudre l'inéquation $\frac{2}{x} \geq 3$, puis l'inéquation $\frac{2}{x} \leq 3$.
- Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x+1}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
- Résoudre l'inéquation $\frac{3}{x-3} > \frac{2}{x+1}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1.3.4 Inéquations du second degré**Exercice 38.****Signe d'un trinôme du second degré**

Soit $P(x) = x^2 - x - 1$.

- Résoudre $P(x) \leq 0$.
- Calculer $P(-1)$ et $P\left(-\frac{1}{2}\right)$. En déduire que $-\frac{1}{2} > \frac{1-\sqrt{5}}{2} > -1$.

Exercice 39.**Résolution d'une inéquation du second degré**

Résoudre dans \mathbb{R} :

- $x^2 - 2x \geq 0$.
- $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.
- $(2 + 5x)^2 \leq (5 + 2x)^2$.
- $\frac{2x+1}{x+2} + \frac{x+3}{x-1} \leq \frac{3x}{x-1}$.

Exercice 40.**Inéquations qui se ramènent à une équation du second degré**

- Résoudre dans \mathbb{R} , $3|x-1| \leq |x-5|$.
- (a) Vérifier que pour $x = 1$, $3x^3 + 5x^2 - 7x - 1 = 0$.
(b) En déduire l'ensemble des solutions de $3x^3 + 5x^2 - 7x - 1 \geq 0$.
Commencer par mettre $(x-1)$ en facteur.
- Résoudre dans \mathbb{R}_+^* , $\ln(x) + \ln(x-2) \geq 0$.
- (a) Résoudre dans \mathbb{R} , $t^2 + 3t - 4 \geq 0$.
(b) En déduire l'ensemble des solutions réelles de $e^{2x} + 3e^x - 4 \geq 0$.

Exercice 41.**Le carré d'un réel est positif**

1. Montrer que pour tout a réel et pour tout b réel, $2ab \leq a^2 + b^2$ et $4ab \leq (a + b)^2$.
2. (a) Montrer que pour tout $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
(b) En déduire que si a, b et c sont positifs, alors $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$.
3. Montrer que pour tout x réel et pour tout y réel, $2x + 4y \leq x^2 + y^2 + 5$.

1.4 Règles de calcul sur les puissances, logarithmes et exponentielles**1.4.1 Puissances****Exercice 42.****Simplifications d'expressions avec des puissances de 10**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $B = \sqrt{10^6} \left(\frac{10^{-2}}{10^{-1}} \right)^2$

3. $D_n = 2^n + 2^{n+2} - 2^{n+1}$ (pour n entier)

2. $C = \left(\frac{10^4 \times (10^{-1})^2}{\sqrt{10^{-4}}} \right)^{-1}$

4. $E = \frac{(a \times (a^2 \times b)) \times b^{-2}}{a^3 \times (b^{-2})^{-3}}$

Exercice 43.**Notation scientifique et simplification d'expressions**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = 0.000571 \times 10^3 - 5710 \times 10^{-4} + 5.71$

3. $C = \frac{2.41 \times 10^3}{0.241 \times 10^{-2}} - 5.32 + 0.0532 \times 10^4$.

2. $B = \frac{3 \times 10^7}{21 \times 10^{-8}} + \frac{1}{7} \times 10^{15} - \frac{10^{10}}{35 \times 10^{-6}}$.

Trier par ordre croissant : $A = 7.25 \times 10^{-4}$, $B = 4.7 \times 10^5$, $C = 14.1 \times 10^{-3}$, $D = 10.48 \times 10^{-2}$, $E = 2.257 \times 10^4$ et $F = 3 \times 10^5$.

Exercice 44.**Simplification de produits et quotients de puissances**

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $A = \frac{(3^5 \times 2^{-2})^2}{(9^{-1} \times 2^3)^3}$

4. $D = \frac{(-3)^2 \times (-2)^3 \times 6^{-1}}{12^4 \times 18^{-2}}$

2. $B = \left(\frac{2^2 \times 10^{-5}}{(20 \times 5^2)^3} \right)^{-2}$

5. $E = \frac{(-2)^5 \times 7^8 \times (-25)^3}{\left((-10^4) \times \frac{3^4}{(2 \times 7)^3} \right)^2}$

3. $C = \frac{(2^3)^{-2} \times 5^3}{(2^5 \times 5^2)^{-1}}$

Exercice 45.**Simplification de puissances de puissances**

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $x = 2^{(3^2)}$ et $y = (2^3)^2$

4. $B = \frac{2^{3^2}}{2^{4^2}}$

2. $u = 3^{(-1)^2}$ et $v = 3^{-1^2}$

5. $C = 2^{(-3 \times 2^{(-4)^2})}$

3. $A = 2^{-3} \times 2^{4^2}$

6. $D = (2^{3^2} \times 2^{-5})^{-3^2}$

1.4.2 Racines carrées**Exercice 46.****Carré et racine carrée**

1. Vérifier, sans utiliser votre calculatrice, que $(9 + \sqrt{5})^3 + (9 - \sqrt{5})^3$ est un nombre entier.

2. Montrer que $\sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}} = \sqrt{2}$.

3. Montrer que $\sqrt{7 - \sqrt{5}} + \sqrt{7 + \sqrt{5}} = \sqrt{14 + 4\sqrt{11}}$.

Exercice 47.**Racine carrée d'un produit, d'un quotient, d'une puissance**

Simplifier les expressions suivantes :

1. $a = \frac{\sqrt{8}}{2} + \frac{\sqrt{50}}{4} - \sqrt{\frac{576}{18}}$, $b = 4\sqrt{27} - 5\sqrt{48} + 4\sqrt{12}$ et $c = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - 2)$.

2. $u = \frac{\left(\frac{10^2 \times 3^2}{8 \times 5^2}\right)^{-1}}{\sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}}}$

3. $v = \left(\sqrt{2^3 \times 9}\right)^{-1} \times \sqrt{\frac{81 \times 2^5}{100}}$

Exercice 48.**Résoudre des équations avec des racines carrées**

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes : 2. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

(a) $\sqrt{2x + 5} = 2$

(a) $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 2$

(b) $x + 1 = \sqrt{2x - 1}$

(b) $\sqrt{x^2 + 21} = x - 7$

(c) $x + 1 = \sqrt{1 - 2x}$

(c) $\sqrt{3x^2 + x - 1} = \sqrt{2x^2 + x + 1}$

(d) $x + 1 = \sqrt{-x - 1}$

(d) $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{5 + 4x}$

(e) $x - 1 = \sqrt{x + 1}$

Exercice 49.**Utiliser la quantité conjuguée**

Simplifier les expressions suivantes : $a = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ et $b = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

Exercice 50.**Racines carrées et fractions**

Mettre sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{2}$ les nombres

$$A = 4 - \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad B = 3 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

1.4.3 Fonction exponentielle**Exercice 51.****Propriétés algébriques de l'exponentielle**

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. a = e^{2x} \times e^{-(x+1)} \times \frac{1}{e^{4x+2}}$$

$$4. A = \frac{e^{x-1}(e^{x+1})^2}{e^{2(x+3)} \times (e^{-3(x+2)})^{-1}}$$

$$2. b = (e^{2x})^2 \times \frac{e^{-x+4}}{e^{-3x}}$$

$$3. c = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \times \left(\frac{1 - e^x}{1 + e^{-x}} \right)^{-1}$$

$$5. B = \sqrt{e^{x-4}} \times \frac{4e^x}{(e^{x/2})^3}$$

Exercice 52.**Résolution d'équation avec exponentielle**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$1. e^{1/x} = 3$$

$$4. e^x - e^{-x} = \sqrt{5}$$

$$2. e^{-\ln(x)} = 2$$

On pourra poser $t = e^x$ et se ramener à une équation du second degré.

$$3. e^{2x} - e^{x+1} = 0$$

Exercice 53.**Equations avec exponentielle**

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est VRAIE ou FAUSSE.

1. Pour tout t réel, $e^{(-e^t)}$ est inférieur ou égal à 1.

2. L'équation $e^{|x|} = e^{|x+1|}$ n'admet pas de solution x réelle.

3. Pour tout $x > 0$, $[e^{-\ln(x)/2}]^4 = -\frac{1}{x^2}$.

Exercice 54.**Résolution d'inéquations avec exponentielle**

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$1. e^x - \frac{1}{e} > 0$$

$$2. e^{3x} > 2e^{x+1}$$

$$3. e^{2x} - e^x \leq 6$$

Indication : poser $y = e^x$, et remarquer que $e^{2x} = y^2$.

1.4.4 Fonction logarithme népérien

Exercice 55. Propriétés algébriques du logarithme et de l'exponentielle

Simplifier les expressions suivantes.

1. $a = \ln(e^{4.5})$, $b = \ln(\sqrt{e}) + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$, et $c = \exp(\ln(3 - \sqrt{2}))$.

2. $d = e^{-\ln(3)}$, $f = \exp(\ln(5) - \ln(2))$ et $g = \ln\left(\frac{1}{e^{-7}}\right)$.

3. $h = \ln(e^{\ln(2)} e^{\ln(3)})$ et $k = \ln(2^2) - \ln\left(\frac{1}{8}\right)$.

Exercice 56. Propriétés algébriques du logarithme

1. Montrer que pour tout $x > 2$, $\ln(x - 2) = \ln(x^2 - 4) - \ln(x + 2)$.

2. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(x^2 - x + 1) = \ln(x^3 + 1) - \ln(x + 1)$.

Exercice 57. Equations et inéquations avec logarithme

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est VRAIE ou FAUSSE.

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = -n \ln(2)$

2. Pour tout $x > 0$, $\ln(x) = 2 \ln(\sqrt{x})$

3. Pour tout $x > 0$, $[\ln(x + 1)]^2 = \ln(2x + 2)$

4. Pour tout $x > 0$, $\ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = -\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$

Exercice 58. Equations et inéquations avec logarithme

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) $\ln(2x^2 + x) = 0$

(b) $\ln(x)(\ln(x) + 2) = 0$

(c) $\ln|x + 1| = 1$

2. (a) $\frac{\ln(x)}{\ln(8)} \geq \frac{2}{3}$

(b) $\ln(1 - 2x) < \frac{1}{2}$

1.5 Études de fonctions

1.5.1 Domaine de définition

1.5.2 Sens de variation

1.5.3 Dérivée

1.5.4 Calcul de dérivées, tableaux de variations

Exercice 59.**Dérivée d'un produit et d'un quotient**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leurs domaines.

1. $f : x \mapsto \cos(x) \times \ln(x + 2)$
2. $g : x \mapsto \frac{1}{e^{\sin(x)}}$ (de deux façons différentes : en utilisant la formule pour la dérivée d'un inverse, puis en commençant par utiliser une propriété de l'exponentielle).

Exercice 60.**Dérivées de fonctions composées types**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leurs domaines.

1. $a : x \mapsto \frac{x^3 - 7x^2 + 4}{\sin(x)}$
2. $b : x \mapsto \ln(\sqrt{2x^2 + 3})$

Exercice 61.**Dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient**

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction définie par :

- | | |
|---|---|
| 1. $f(x) = -2x^2 + 5x - \sqrt{3}x + 2\pi$ | 6. $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ |
| 2. $f(x) = (3x + 1)^4$ | 7. $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5}$ |
| 3. $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{(2x + 1)^2}$ | 8. $f(x) = \cos^3 x$ |
| 4. $f(x) = x^2\sqrt{x - 1}$ | 9. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ |
| 5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 7(x + 1)^2$ | 10. $f(x) = x \cos(4x)$ |
| | 11. $f(x) = e^x (\cos x - \sin x)$ |

Exercice 62.**Calculs de dérivées avec logarithme**

Déterminer l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité et exprimer la dérivée de la fonction de la variable réelle définie par :

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. $f(x) = \ln(1 - x)$ | 6. $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ |
| 2. $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$ | 7. $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ |
| 3. $f(x) = \ln\left(\frac{2x^2 - x - 1}{x}\right)$ | 8. $f(x) = (2 - x) \ln(x + 1)$ |
| 4. $f(x) = \ln(\sin x + 2)$ | 9. $f(x) = \ln(e^x - 1)$ |
| 5. $f(x) = (\ln x)^3$ | |

Exercice 63.**Calculs de dérivées avec exponentielle**

Déterminer l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité et exprimer la dérivée de la fonction de la variable réelle définie par :

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 1. $f(x) = xe^x$ | 6. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ |
| 2. $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$ | 7. $f(x) = e^{\frac{1}{2x}}$ |
| 3. $f(x) = (x + 1)e^{-2x}$ | 8. $f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$ |
| 4. $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ | 9. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ |
| 5. $f(x) = e^{x^2}$ | |

Exercice 64.**Calculs de dérivées variés**

Déterminer l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité et exprimer la dérivée de la fonction de la variable réelle définie par :

1. $f(x) = e^{\cos x}$

2. $f(x) = xe^{2/x}$

3. $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$

4. $f(x) = \ln(1 - x^2)$

5. $f(x) = x \ln x - x$

6. $f(x) = e^{x \ln x}$

7. $f(x) = (2x + 3) \sqrt{2x + 3}$

8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$

9. $f(x) = \sqrt{x} e^{-1/x}$

10. $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 7)$

11. $f(x) = \ln(2 + \cos x)$

12. $f(x) = e^{1/x}$

13. $f(x) = e^{x/(x+1)}$

1.5.5 Calcul de limites**Exercice 65.****Limites de quotients de polynômes**

On pose $f : x \mapsto \frac{3x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 2}$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.2. Étudier la limite de f en 1.**Exercice 66.****Composition de limites**1. Étudier l'existence et la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)$, de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)$.2. Étudier l'existence et la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et de $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$.**Exercice 67.****Limite d'un quotient**

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin x + 1}{x + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 2)^2}$

Exercice 68.**Identifier le terme prépondérant**

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^2 + 1}{5x^2 + x + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x}{x - \sqrt{x}}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + 3}{2 + \cos(x)}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{\frac{\ln x}{x} + 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - 3x$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + x} - (x + 1)$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - (x + 1)$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 3}$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^8 - 1}$

1.5.6 Etude de fonction

Exercice 69.**Etude de fonction**

Faire l'étude et tracer la courbe représentative la fonction de la variable réelle définie par :

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

2. $f(x) = x \ln x$

1.6 Fonctions usuelles

1.6.1 Fonctions puissances

1.6.2 Complément : les fonctions racines nièmes

Exercice 70.**Racines nièmes**

Simplifier $A = 1024^{1/10}$, $B = 81^{1/3}$ et $C = \sqrt[4]{8\sqrt{2}}$.

Exercice 71.**Résolution d'une équation polynomiale**

Résoudre dans \mathbb{R} : $x^6 - 19x^3 = 216$

1.6.3 Fonction exponentielle

Exercice 72.**Etude de fonction avec exponentielle**

Construire le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x}{x}$ en indiquant les limites aux bornes du domaine de définition.

Exercice 73.**Etude de fonction avec exponentielle**

1. Construire le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en indiquant les limites aux bornes du domaine de définition.
2. Tracer la courbe représentative de cette fonction en précisant la tangente en 0.
3. Justifier, pour tout y réel supérieur à 1, l'existence d'un unique réel x positif tel que $f(x) = y$, et exprimer ce réel en fonction de y .

1.6.4 Fonction logarithme

Exercice 74.**Étude de fonction avec logarithme**

Démontrer que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 75.**Étude de fonction avec logarithme**

On considère la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)$$

1. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe.
2. Exprimer $f'(x)$ et étudier son signe suivant x .
3. Construire le tableau de variation de f .
4. En déduire le signe de $f(x)$ suivant x .

Exercice 76.**Étude de fonction avec logarithme**

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition D de cette fonction.
2. Justifier, pour tout réel x appartenant à D , $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.
3. Exprimer la dérivée de f .
4. Construire le tableau de variation de la fonction f en indiquant les limites aux bornes du domaine de définition.
5. Tracer la courbe représentative de cette fonction en précisant la tangente en 0.

1.6.5 Fonctions trigonométriques**Exercice 77.****Valeurs exactes**

Donner les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) ; \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) ; \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) ; \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) ; \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) ; \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) ; \cos\left(\frac{27\pi}{2}\right) ; \sin\left(\frac{27\pi}{2}\right) ; \cos\left(\frac{23\pi}{3}\right)$$

Exercice 78.**Relation fondamentale**

1. Déterminer $\cos x$ sachant que x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et que $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. Déterminer $\sin x$ sachant que x est compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$ et que $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. Pour x réel, justifier l'existence de $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ et l'exprimer sans symbole de racine carrée.

Exercice 79.**Périodicité**

Pour n entier naturel, on pose $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

Démontrer que, pour tout n entier naturel, $u_{n+6} = u_n$. Calculer u_{2016} et u_{2017} .

Exercice 80.**Equations et inéquations trigonométriques**

1. Résoudre dans \mathbb{R} : $\cos x = 1$; $\cos x = 0$; $\cos x = \frac{1}{2}$
2. Résoudre dans \mathbb{R} : $\sin x = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$
3. Résoudre dans $[0; 3\pi]$: $\sin x \geq 0$

Exercice 81.**Une étude de signe**

Exprimer $f(x) = \cos^2 x + 2 \sin^2 x - 2 \sin x - 1$ en fonction de $\sin x$ uniquement.

En déduire le signe de $f(x)$ suivant le réel x .

Exercice 82.**Une équation du second degré**

On fixe un réel a .

1. Déterminer les solutions complexes de l'équation $z^2 - 2 \cos\left(\frac{a}{2}\right)z + 1 = 0$.
2. Donner les solutions sous forme exponentielle.

Exercice 83.**Formules d'addition**

1. Exprimer $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ à l'aide de $\cos x$ et $\sin x$.
2. (a) Vérifier que, pour tout x réel, $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
 (b) En déduire toutes les solutions réelles de : $\cos x = \sin x$; $\cos x \geq \sin x$
Illustrer vos réponses à l'aide le cercle trigonométrique.

Exercice 84.**Fonctions sinusoïdales**

On pose, pour tout x réel, $f(x) = \cos(2x)$.

1. Déterminer une période de la fonction f et étudier la parité de f .
2. Construire son tableau de variation sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Construire la courbe de f sur cet intervalle et compléter pour représenter f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
4. Résoudre dans \mathbb{R} : $\cos(2x) = 0$; $\cos(2x) = 1$; $\cos(2x) = \frac{1}{2}$.
5. On pose, pour tout x réel, $g(x) = \cos(2x) + 1$. Représenter g sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

Exercice 85.**Périodicité**

1. Déterminer la plus petite période positive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(4x) + \sin(2x)$
2. On fixe deux réels ω et ϕ avec $\omega > 0$.
 On pose, pour tout t réel, $f(t) = \cos(\omega t + \phi)$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Vérifier que T est période de f .

Exercice 86.**Limites**

Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$

1.7 Intégration**1.7.1 Primitives d'une fonction sur un intervalle****Exercice 87.****Calculs de primitives**

Déterminer une primitive de chacune des fonctions dont une expression est donnée ci-dessous, en précisant le ou les intervalles de validité.

1. $f(t) = t^4 - 3t + 2.$

6. $d(t) = e^{4t-2}.$

2. $g(x) = \frac{x^3 + x - 1}{x^2}.$

7. $e(x) = \cos(x) \sin^2(x).$

3. $h(t) = (2t + 2)^2.$

8. $u(t) = \frac{1}{t} \ln(t).$

4. $b(t) = \frac{2}{\sqrt{t+1}}.$

9. $v(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$

5. $c(x) = x(x^2 + 1)^2.$

10. $w(t) = \frac{1}{t \ln(t)}.$

Exercice 88.**Calcul de primitives**

Calculer une primitive de la fonction f de la variable définie par l'expression ci-dessous en précisant les intervalles sur lesquels le calcul convient :

1. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

5. $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$

2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

6. $f(x) = xe^{x^2}$

3. $f(x) = \frac{4}{2x-1}$

7. $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

4. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1.7.2 Intégrale d'une fonction continue sur $[a; b]$ **1.7.3 Théorème fondamental et calcul d'intégrales****Exercice 89.****Encadrer une intégrale**

On pose $I = \int_1^3 (1+x)e^{x^2} dx.$

1. Vérifier que pour tout $x \in [1; 3]$, $x \leq 1+x \leq 2x.$

2. Calculer la dérivée de la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = e^{x^2} = \exp(x^2).$

3. En déduire que $\frac{1}{2}(e^9 - e) \leq I \leq e^9 - e.$

Exercice 90.**Primitives et calculs d'intégrales**

Calculer les intégrales :

$$1. E_1 = \int_1^2 \left(x^3 - 2x + 2 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$2. E_2 = \int_0^3 \frac{dx}{3x+1}$$

$$3. E_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) dt$$

$$4. E_4 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dt$$

Exercice 91.**Primitives de fonctions-type et calculs d'intégrales**

$$1. \text{ Calculer } F_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos(x) dx \text{ de deux manières différentes :}$$

(a) En reconnaissant la forme uu' .

(b) En utilisant la formule de duplication faisant apparaître l'angle $2x$.

$$2. \text{ Comment peut-on calculer } F_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^n(x) dx, \text{ pour tout entier naturel } n?$$

Exercice 92.**Dérivées et primitives de puissances de la variable**

$$1. \text{ Calculer la dérivée sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de la fonction } f \text{ définie par : } f(x) = x\sqrt{x} = x x^{1/2} = x^{3/2}.$$

$$2. \text{ La formule donnant une primitive de } x \mapsto x^n \text{ sous la forme } x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ est elle valable pour } n = \frac{1}{2}?$$

$$3. \text{ Calculer l'intégrale } G = \int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx.$$

Exercice 93.**Primitives de fonctions-type et calculs d'intégrales**

Calculer les intégrales :

$$1. I_1 = \int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} \text{ et } I_2 = \int_{-1}^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx.$$

$$2. I_3 = \int_0^1 \frac{x}{(3x^2+1)^3} dx \text{ et } I_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \sin(t)}{\sqrt{1+\cos(t)}} dt.$$

$$3. I_5 = \int_{-1}^1 x^2(x^3+1)^3 dx \text{ et } I_6 = \int_0^{\pi/6} \cos(2t)e^{\sin(2t)} dt.$$

Exercice 94.**Calculs de primitives et intégrales**

1. Trouver a , b et c réels tels que pour tout $t \neq -2$, $\frac{t^2}{t+2} = at + b + \frac{c}{t+2}$.
2. En déduire une primitive F de f définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(t) = \frac{t^2}{t+2}$.
3. On définit la fonction g par $g(t) = \frac{e^{3t}}{e^t + 2}$.
 - (a) En posant $u(t) = e^t$, trouver une primitive de g sur \mathbb{R} .
 - (b) En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{e^{3t}}{e^t + 2} dt$.

1.7.4 Intégration par parties**Exercice 95.****Calculs d'intégrales par IPP**

Déterminer chacune des intégrales suivantes, en utilisant une IPP.

1. $A = \int_1^2 x e^{x+2} dx$.
2. $B = \int_0^\pi t \cos(t) dt$.
3. $C = \int_1^2 (x+3) \sin(x) dx$.

Exercice 96.**Calculs d'intégrales par IPP**

On pose $I = \int_0^1 x^3 e^{-x/2} dx$, $J = \int_0^1 x^2 e^{-x/2} dx$ et $K = \int_0^1 x e^{-x/2} dx$.

1. A l'aide d'une IPP, exprimer I en fonction de J . A nouveau à l'aide d'une IPP, exprimer J en fonction de K .
2. Montrer que $K = 4 - 6e^{-1/2}$.
3. En déduire que $I = 96 - 158e^{-1/2}$.

Exercice 97.**Calculs d'intégrales par IPP**

Déterminer chacune des intégrales suivantes, en utilisant une IPP.

1. $D = \int_1^3 (2t+1)e^{3t} dt$.
2. $E = \int_0^1 x^2 e^{3x} dx$.
3. $F = \int_1^e \ln(t) dt$.

Exercice 98.**Calculs de primitives par IPP**

1. Justifier que la fonction $\varphi : x \mapsto \int_1^x 2te^{t^2+1} dt$ est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} .
2. Pour tout x réel, donner une expression de $\varphi(x)$ sans symbole intégral.
3. A l'aide d'une IPP, en déduire une primitive sur $I = \mathbb{R}$ de la fonction $f : t \mapsto 2t^3 e^{t^2+1}$.

1.8 Raisonement par récurrence et suites numériques**1.8.1 Démontrer par récurrence****Exercice 99.****Prouver des relations par récurrence**

En raisonnant par récurrence sur n , montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier p est divisible par 3 s'il existe un nombre entier j tel que $p = 3 \times j$.

Exercice 100.**Prouver des inégalités par récurrence**

Montrer que pour tout $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Exercice 101.**Prouver des relations par récurrence**

On suppose qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifie $u_0 = 8$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.

Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$.

1.8.2 Généralités**Exercice 102.****Suites majorées, minorées, bornées**

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ est bornée.
2. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} w_0 = 10 \\ w_{n+1} = \sin(w_n) \end{cases}$ est bornée.
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est bornée.

Exercice 103.**Encadrer les termes d'une suite**

Déterminer si chacune des suites dont le terme général est donné ci-dessous est majorée, minorée et/ou bornée.

$$1. u_n = \frac{2n-1}{n^2+n+1}$$

$$3. w_n = \frac{7-n^2}{2\sqrt{n}+1}$$

$$2. v_n = \frac{n^2}{3n+4}$$

$$4. z_n = \sqrt{n^3+2} - n + 1$$

Exercice 104.**Encadrer les termes d'une suite**

Déterminer si chacune des suites dont le terme général est donné ci-dessous est majorée, minorée et/ou bornée.

1. $a_n = \frac{2 + \cos(n)}{\ln(n+3)}$

3. $c_n = \frac{2 + e^{2n}}{e^{2n+2} + 1}$

2. $b_n = \frac{e^n - 1}{2 + \sin(n)}$

Exercice 105.**Encadrements et récurrence**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{7 + 3u_n} \end{cases}$.

Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 14$.

Exercice 106.**Encadrements et récurrence**

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$.

Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 107.**Etudier la monotonie d'une suite**

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de terme général $u_n = \frac{n+4}{n+3}$ est décroissante.

2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ de terme général $v_n = \frac{n+2}{n+3}$ est croissante.

Exercice 108.**Etudier la monotonie d'une suite**

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$.

1. Sans faire de récurrence, montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 1$.

2. Montrer, sans raisonner par récurrence, que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

On pourra considérer les quotients $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 109.**Etudier la monotonie d'une suite**

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $v_n = 2n + (-1)^n$ est croissante.

Indication : on pourra commencer par vérifier que pour tout n pair, $(-1)^n = 1$ et que pour tout n impair, $(-1)^n = -1$.

Exercice 110.**Prouver la monotonie d'une suite par récurrence**

Montrer, en raisonnant par récurrence, que la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$ est croissante.

Exercice 111.**Déterminer la nature d'une suite**

Déterminer la limite de la suite de terme général :

1. $u_n = 5 - \frac{2}{\sqrt{n}}$

3. $w_n = 2n^2 - 4n - 3$

2. $v_n = (n+2)(3-n)$

4. $z_n = \frac{3n^2 - 2n + 5}{6n^2 + 4n + 2}$

Exercice 112.**Preuve de convergence par encadrements**

Déterminer par encadrements les limites des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

1. $u_n = \frac{2 \times (-1)^n}{n}$.

3. $w_n = n^2 - n \cos(n)$.

2. $v_n = \frac{1+n}{\sqrt{n}+n^2}$.

4. $z_n = \frac{2n + \sqrt{n+5}}{n + \cos(n)}$.

Exercice 113.**Convergence monotone, raisonnement par l'absurde**

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
2. On va montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. On suppose que $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée par M .
 - (a) Montrer que $M > 0$.
 - (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{M}$.
 - (c) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 1 + \frac{n}{M}$.
 - (d) Conclure.

Exercice 114.**Etude d'une suite, convergente monotone**

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \end{cases}$.

1. En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 4$.
2. En raisonnant à nouveau par récurrence, montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
3. Peut-on en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente ? Peut-on en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{4}(u_n - 4)$. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n - 4 \leq \frac{1}{4^{n-1}}$.
5. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

1.8.3 Suites arithmétiques, géométriques

Exercice 115.

Relations entre les termes d'une suite arithmétique

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r , et on fixe un entier naturel p .

Montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{p+k} = u_p + k \times r$.

Exercice 116.

Variations d'une suite géométrique

- On suppose que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.
 - On suppose que $u_0 = 7$. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
 - On suppose que $u_0 = -3$. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
- On suppose que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = -2$ et que $u_0 > 0$. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas monotone.

Exercice 117.

Limite d'une suite géométrique

Déterminer les limites des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

1. $u_n = 1 - 2^{n-1}$.

3. $w_n = \frac{2^n + 3}{3^n + 1}$.

2. $v_n = n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

4. $z_n = 3^{n+1} - 5^n$.

Exercice 118.

Variation et limite d'une suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On suppose que $u_0 > 2$.
 - Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 2$.
 - En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
 - Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 2$ est géométrique de raison 2.
 - En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- On suppose que $u_0 < 2$.
En reprenant la méthode utilisée ci-dessus, montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n < 2$, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Que peut on dire de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $u_0 = 2$?

Chapitre 2

Savoirs et savoir faire

2.1 Techniques opératoires

2.1.1 Développer, factoriser

Définition 2.1.1.

Développer un produit

Développer un produit de facteurs signifie le transformer en une somme de termes en utilisant la formule :

$$k(a + b) = ka + kb$$

autant de fois que nécessaire.

Illustration.

Développer un produit

Développer le produit $A = (2x + 3) \times (2 - x)$ signifiera effectuer le calcul :

$$\begin{aligned} (2x + 3) \times (2 - x) &= 2x \times (2 - x) + 3 \times (2 - x) \\ &= 4x - 2x^2 + 6 - 3x \\ &= -2x^2 + x + 6 \end{aligned}$$

Exercice 1.

Développer un produit

Définition 2.1.2.

Factoriser une somme

Factoriser une somme signifie la transformer en un produit en utilisant la formule :

$$ka + kb = k(a + b)$$

Illustration.

Factoriser une somme

Soit E la somme $E = x(y + 1)(x + 1) + x^2(x - 3)(y + 1)$.

On remarque que les facteurs x et $y + 1$ sont communs aux deux termes de la somme. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} x(y + 1)(x + 1) + x^2(x - 3)(y + 1) &= x(y + 1) \times [(x + 1) + x(x - 3)] \\ &= x(y + 1) \times [x^2 - 2x + 1] \end{aligned}$$

A l'aide de l'identité remarquable $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, on peut poursuivre :

$$\begin{aligned} E &= x(y + 1) \times [x^2 - 2x + 1] \\ &= x(y + 1)(x - 1)^2 \end{aligned}$$

Exercice 2.

Factoriser une somme

Exercice 3.

Développer et factoriser, calcul avec des fractions

Remarque 2.1.1.**Règle de priorité entre additions et multiplications**

Le produit est toujours prioritaire sur l'addition : l'expression $a + b \times c$ signifie $a + (b \times c)$. En général, quand on s'intéresse à cette quantité, on n'écrit pas les parenthèses autour du produit $b \times c$. Par contre, dans l'expression $(a + b) \times c$, les parenthèses ne sont pas facultatives, leur présence est essentielle au sens de ce qui est écrit.

Par exemple

$$(2 + 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20 \neq 2 + 12 = 2 + 3 \times 4 = 2 + (3 \times 4)$$

De même, si on veut mettre en facteur 7 dans la somme $S = 2a \times 7 - b \times 7$, les parenthèses sont indispensables :

$$S = 2a \times 7 - b \times 7 = (2a - b) \times 7 \neq 2a - b \times 7.$$

Ceci concerne également le signe $-$, qui placé devant une parenthèse indique une multiplication par (-1) . Le développement de $A = (x-1) \times (a+b)$ donne par exemple $(x-1) \times (a+b) = x(a+b) - (a+b)$ tandis que $A \neq x \times (a+b) - a + b$, que $A \neq x \times a + b - (a+b)$ et que $A \neq x \times a + b - a + b$.

Illustration.**Priorité des opérations, importance des parenthèses**

On considère l'expression $A = 1 + 2 \times 3 + 4 \times 5$. Le calcul donne $A = 1 + 6 + 20 = 27$.

On vous donne une paire de parenthèses, que vous pouvez insérer où vous le souhaitez dans l'expression qui définit A (de façon à fabriquer une expression ayant un sens). Combien de valeurs différentes pouvez-vous ainsi fabriquer ?

- La parenthèse gauche (peut se situer soit juste avant le 1, soit juste avant le 2, soit juste avant le 3, soit juste avant le 4. De même, la parenthèse droite) peut se situer soit juste après le 2, soit juste après le 3, soit juste après le 4, soit juste après le 5.
- Les différentes possibilités, qui ne redonnent pas la valeur de A sont :

$$- (1 + 2) \times 3 + 4 \times 5 = 9 + 20 = 29$$

$$- (1 + 2 \times 3 + 4) \times 5 = 11 \times 5 = 55$$

$$- 1 + (2 \times 3 + 4) \times 5 = 1 + 10 \times 5 = 51$$

$$- 1 + 2 \times (3 + 4) \times 5 = 1 + 2 \times 7 \times 5 = 71$$

$$- 1 + 2 \times (3 + 4 \times 5) = 1 + 2 \times 23 = 47$$

En plus de celle de A , on peut donc fabriquer 5 valeurs différentes en plaçant des parenthèses.

2.1.2 Identités remarquables**Propriété 2.1.1.****Identités remarquables**

On suppose que x et y sont deux nombres réels ou complexes. On appelle identités remarquables les formules suivantes :

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x - y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\ (x + y)(x - y) &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Illustration.**Identités remarquables**

Si on connaît les tables de multiplications, on peut utiliser des identités remarquables pour calculer des carrés de nombres entiers. Par exemple

$$23^2 = (20 + 3)^2 = 20^2 + 2 \times 3 \times 20 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529.$$

On peut également réaliser des substitutions par des expressions contenant des lettres. Par exemple

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= \left((a + b) + c \right)^2 \\ &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{aligned}$$

Exercice 4.**Identités remarquables****2.1.3 Résolution d'une équation par factorisation****Propriété 2.1.2.****Annulation d'un produit**

Si a et b sont deux nombres réels ou complexes tels que $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Réciproquement, si $a = 0$ ou $b = 0$, alors le produit $a \times b$ est nul.

Méthode.**Résolution d'une équation par factorisation**

Si on arrive à factoriser une quantité, il devient plus facile de déterminer quand elle s'annule.

Illustration.**Résolution d'une équation par factorisation**

Pour trouver les solutions de $(x + 1) \times (2x + 3) - (x + 4) \times (x + 1) = 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} (x + 1) \times (2x + 3) - (x + 4) \times (x + 1) &= (x + 1) \times [2x + 3 - (x + 4)] \\ &= (x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

Ainsi, $(x + 1) \times (2x + 3) - (x + 4) \times (x + 1) = 0$ équivaut à $(x + 1)(x - 1) = 0$.

Comme le produit $(x + 1)(x - 1)$ s'annule si et seulement si un de ses facteurs est nul, l'équation $(x + 1)(x - 1) = 0$ admet deux solutions qui sont $x = -1$ ou $x = 1$. On conclut que l'équation $(x + 1) \times (2x + 3) - (x + 4) \times (x + 1) = 0$ admet exactement deux solutions, qui sont $x = 1$ et $x = -1$.

Illustration.**Résolution d'une équation par factorisation**

On cherche l'ensemble des points M du plan \mathbb{R}^2 dont les coordonnées (x, y) vérifient $(x + 1)^2 = (y + 2)^2$.

- L'équation $(x + 1)^2 = (y + 2)^2$ équivaut à $(x + 1)^2 - (y + 2)^2 = 0$, qui se factorise en

$$(x + 1)^2 - (y + 2)^2 = [(x + 1) + (y + 2)] \times [(x + 1) - (y + 2)] = [x + y + 3] \times [x - y - 1].$$

On en déduit que $(x + 1)^2 = (y + 2)^2$ si et seulement si $(x + y + 3 = 0$ ou $x - y - 1 = 0)$.

- L'ensemble des solutions de $x + y + 3 = 0$ est la droite D_1 d'équation $y = -x - 3$. De même, l'ensemble des solutions de $x - y - 1 = 0$ est la droite D_2 d'équation $y = x - 1$.
- On en déduit que l'ensemble des solutions de $(x + 1)^2 = (y + 2)^2$ est la réunion des deux droites D_1 et D_2 du plan \mathbb{R}^2 .

Exercice 5.**Résolution de $f(x) = 0$ par factorisation****Exercice 6.****Résolution de $f(x) = 0$ par factorisation****2.1.4 Calculer avec des fractions****Propriété 2.1.3.****Calcul fractionnaire**

Soient $a, b \neq 0, c$ et $d \neq 0$ quatre nombres réels ou complexes.

$$1. (a) a = \frac{a}{1}.$$

$$(b) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } ad = bc. \text{ En particulier, } \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}.$$

$$(c) a \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d} = c \times \frac{a}{d} = ac \times \frac{1}{d}.$$

$$2. \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \text{ et } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

$$3. \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$4. \text{ On suppose également que } c \neq 0. \text{ Alors } \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}, \text{ et } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Illustration.**Sommes de fractions**

Quand on somme deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on n'applique pas la propriété 2. ci-dessous sans réfléchir, mais on cherche au contraire le plus petit dénominateur commun aux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

Pour calculer $A = \frac{1}{8} + \frac{1}{12}$ par exemple, on remarque que $8 = 2 \times 4$ et que $12 = 3 \times 4$. On en déduit que

$$A = \frac{3}{3 \times 8} + \frac{2}{2 \times 12} = \frac{3}{24} + \frac{2}{24} = \frac{5}{24}.$$

De la même façon, pour calculer $B = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2-1}$, on commence par remarquer que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, ce qui permet d'écrire

$$B = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)}.$$

Exercice 7.**Calculs de sommes de fractions**Remarque 2.1.2.**Règles de priorité et usage des parenthèses**

On a vu que $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$. Si $b = x + y$ est une somme, alors l'écriture de $\frac{a \times b}{c}$ nécessitera l'utilisation de parenthèses : $a \times \frac{x+y}{c} = \frac{a(x+y)}{c} \neq \frac{ax+y}{c}$.

Par exemple

$$3 \times \frac{x+2}{5} = \frac{3 \times (x+2)}{5} = \frac{3x+6}{5} \neq \frac{3 \times x + 2}{5}.$$

On prendra également garde à ceci pour les signes $-$, qui correspondent à des multiplications par (-1) . Par exemple

$$\frac{x+3}{-5} = -\frac{x+3}{5} = \frac{-(x+3)}{5} = \frac{-x-3}{5} \neq \frac{-x+3}{5}$$

Exercice 8.**Sommes et produit de fractions, règles de priorité**Remarque 2.1.3.**Simplifications de fractions sur plusieurs niveaux**

Les fractions sur plusieurs niveaux doivent être écrites avec soin. Lors des calculs, la barre de fraction principale doit se situer à l'horizontal du signe =. L'expression $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ n'est pas correcte. En particulier

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab} = \frac{\frac{1}{a}}{b} = \frac{\frac{1}{b}}{a} \neq \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

De même, l'expression $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ est ambiguë et ne doit pas être utilisée. Par exemple,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \neq \frac{\frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}}}{1} = \frac{a}{\frac{bd}{c}} = \frac{ac}{bd} \neq \frac{a}{\frac{(\frac{b}{c})}{d}} = \frac{a}{\frac{b}{cd}} = \frac{acd}{b}$$

Illustration.**Simplifications de fractions sur plusieurs niveaux**

Simplifions $A = \frac{x}{y}$, où $x = \frac{a+2}{a+3}$ et $y = \frac{a-1}{2a+1}$.

$$A = \frac{\frac{a+2}{a+3}}{\frac{a-1}{2a+1}} = \frac{a+2}{a+3} \times \frac{1}{\frac{a-1}{2a+1}} = \frac{a+2}{a+3} \times \frac{2a+1}{a-1} = \frac{(a+2)(2a+1)}{(a+3)(a-1)}.$$

Simplifions $B = \frac{\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1}}{1}$. On écrit

$$B = \frac{\frac{\frac{2}{6} + \frac{3}{6}}{1}}{\frac{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{\frac{\frac{5}{6}}{1}}{\frac{\frac{3}{2}}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{6 \times 3} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Exercice 9.**Simplifications de fractions sur plusieurs niveaux****Exercice 10.****Simplifications de fractions sur plusieurs niveaux****Exercice 11.****Simplifications de fractions sur plusieurs niveaux****2.1.5 Substituer dans une formule**

Différents passages de cette sous-section font appels à des notions qui sont révisées dans la suite de ce document.

Illustration.**Substitution dans l'expression définissant une fonction**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x^2 - 2ax + a^2$

Dans l'expression de $f(x)$, le nombre a est fixe, tandis que x désigne une variable. On a par exemple :

- $f(0) = 0^2 - 2a \times 0 + a^2 = a^2$,
- Pour tout t réel :
 - $f(t) = t^2 - 2at + a^2$,
 - $f(t+1) = (t+1)^2 - 2a(t+1) + a^2$,
 - et $f(\cos(t)) = \cos^2(t) - 2a \cos(t) + a^2$,
- $f(a) = a^2 - 2a \times a + a^2 = 0$.

Illustration.**Substitution et encadrement**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x(1-x)$. On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq \frac{1}{4}$.

On introduit $t = x - \frac{1}{2}$, qui équivaut à $x = t + \frac{1}{2}$.

On calcule

$$f(x) = f\left(t + \frac{1}{2}\right) = \left(t + \frac{1}{2}\right) \times \left[1 - \left(t + \frac{1}{2}\right)\right] = \left(t + \frac{1}{2}\right) \times \left[\frac{1}{2} - t\right] = \frac{1}{4} - t^2.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq \frac{1}{4}$.

Illustration.**Suites définies par récurrence et substitutions**

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+3u_n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = \frac{1}{u_k}$. Montrons que la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$v_{k+1} = \frac{1}{u_{k+1}} = \frac{1}{\frac{u_k}{1+3u_k}} = \frac{1+3u_k}{u_k} = \frac{1}{u_k} + 3 = v_k + 3$$

Donc la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 3$.

Exercice 12.

Substitution dans l'expression d'une fonction

Exercice 13.

Substitution dans l'expression d'une fonction

Exercice 14.

Substitution dans une identité remarquable

Exercice 15.

Suites et substitutions

Exercice 16.

Suites et substitutions

Exercice 17.

Suites définies par récurrence et substitutions

2.2 Équations

2.2.1 Équations du premier degré

Définition 2.2.1.

Équation du premier degré

Soient a et b deux réels. Pour résoudre l'équation du premier degré $ax + b = 0$, on détermine les réels x tels que $ax + b = 0$, ce qui équivaut à $ax = -b$.

Méthode.

Résolution

Il y a deux cas.

1. Si $a = 0$ l'équation devient $0 = -b$.

- Lorsque b n'est pas nul, il n'y a pas de solution.
- Lorsque b est nul l'ensemble des solutions est \mathbb{R} .

2. Si a n'est pas nul, en utilisant son inverse, on obtient que l'unique solution de l'équation est

$$x = -b \times \frac{1}{a} = -\frac{b}{a}$$

Illustration.

Équation du premier degré dépendant d'un paramètre

Pour y un réel fixé, résoudre l'équation $\frac{2x-1}{x+5} = y$.

Le premier membre est défini si et seulement si $x \neq -5$. Sous cette condition :

$$\frac{2x-1}{x+5} = y \Leftrightarrow 2x-1 = y(x+5) \Leftrightarrow 2x-1 = yx+5y \Leftrightarrow 2x-yx = 1+5y \Leftrightarrow (2-y)x = 1+5y$$

Il y a deux cas :

1. Si $y = 2$ l'équation devient $0 = 11$, elle n'a pas de solution.

2. Si $y \neq 2$ l'équation devient $x = \frac{1+5y}{2-y}$.

On vérifie que $\frac{1+5y}{2-y} = -5$ est impossible car $\frac{1+5y}{2-y} = -5 \Leftrightarrow 1+5y = -5(2-y) \Leftrightarrow 1 = -10$.

On conclut :

1. Si $y = 2$, l'équation n'a pas de solution.

2. Si $y \neq 2$, l'équation a une unique solution $x = \frac{1+5y}{2-y}$.

Exercice 18.

Des équations du premier degré ou se ramenant au premier degré

2.2.2 Équations du second degré

Définition 2.2.2.

Polynôme de degré 2

Soient a, b, c trois réels tels que a ne soit pas nul. On considère le polynôme du second degré suivant l'indéterminée x qui s'écrit : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Méthode.**Résolution d'une équation du second degré**

• La forme canonique de $P(x)$ s'écrit : $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ où $\Delta = b^2 - 4ac$

• L'équation $P(x) = 0$ équivaut à $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

Il y a trois cas.

1. Si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions réelles qui sont $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Si $\Delta = 0$ ces deux solutions x_1 et x_2 sont confondues, on dit qu'il y a une solution réelle double, elle est égale à $-\frac{b}{2a}$.

3. Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solutions réelles

4. *Pour ceux qui ont choisi l'option Maths expertes* : Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées qui sont $x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

• La factorisation de $P(x)$: Dans tous les cas, on peut écrire $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Illustration.**Des cas on l'on ne calcule pas Δ**

Pour certaines équations de degré 2 suffisamment simples, le calcul de Δ n'est pas nécessaire à la résolution de l'équation. C'est le cas des équations de la forme $x^2 + c = 0$.

1. L'équation $x^2 = 1$ a deux solutions réelles -1 et 1 .

2. L'équation $x^2 - 4 = 0$ a deux solutions réelles -2 et 2 .

3. L'équation $x^2 - 2$ a deux solutions réelles $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

4. L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle

Illustration.**Des cas où l'on factorise**

De même, pour résoudre les équations de la forme $ax^2 + bx = 0$, il n'est pas nécessaire de calculer le discriminant Δ .

1. L'équation $x^2 - x = 0$ équivaut à $x(x - 1) = 0$, elle a deux solutions réelles 0 et 1 .

2. L'équation $x^2 = 2x$ équivaut à $x(x - 2) = 0$, elle a deux solutions réelles 0 et 2 .

3. L'équation $2x^2 + 4x = 0$ équivaut à $2x(x + 2) = 0$, elle a deux solutions réelles 0 et -2 .

Illustration.**Des cas où l'on factorise**

Quand on reconnaît une identité remarquable, il est également inutile de calculer le discriminant.

Par exemple : l'équation $x^2 + 4x + 4 = 0$ équivaut à $(x + 2)^2 = 0$, elle a une solution réelle double -2 .

Illustration.**Une équation qui n'a pas de racine réelle**

En dehors de ces cas particuliers, la résolution de l'équation passe par le calcul du discriminant et l'utilisation de la méthode plus haut.

Par exemple, l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, et elle n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

Illustration.**Équation bicarrée**

On cherche à résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$.

- On pose $X = x^2$, on obtient l'équation $X^2 - 4X + 2 = 0$ qui a deux racines réelles strictement positives $X_1 = 2 + \sqrt{2}$ et $X_2 = 2 - \sqrt{2}$.
- On résout ensuite $x^2 = X_1$ et $x^2 = X_2$. On en déduit que l'équation $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$ admet quatre solutions : $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $-\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $-\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Illustration.**Un changement d'inconnue**

Pour y réel fixé, on veut résoudre $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ où x est une inconnue réelle.

- Cette équation équivaut à $e^x - e^{-x} = 2y$. On pose $X = e^x$.

L'équation devient $X - \frac{1}{X} = 2y \iff X^2 - 1 = 2yX \iff X^2 - 2yX - 1 = 0$.

- Considérons l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2 + 1)$, il est strictement positif pour tout choix du réel y . Elle a donc deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{2y + \sqrt{4(y^2 + 1)}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1} \text{ et } X_2 = \frac{2y - \sqrt{4(y^2 + 1)}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}.$$

- En remarquant que $\sqrt{y^2 + 1} \geq \sqrt{y^2} = |y|$, on prouve que $X_1 > 0$ et que $X_2 < 0$.

Or pour tout x réel, $X = e^x > 0$. La seule solution est donc le réel x tel que $e^x = X_1$.

- On conclut : pour tout choix du réel y , l'équation $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ a une unique solution réelle qui est $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$.

Exercice 19.**A résoudre de façon simple****Exercice 20.****Des équations qui se ramènent à des équations de degré 2****2.2.3 Équations polynomiales de degré supérieur à 2****Méthode.****Factorisation d'un polynôme dont on connaît une racine**

Si l'on connaît une solution a d'une équation polynomiale $P(x) = 0$ de degré n entier supérieur à 1, on peut factoriser $P(x)$ par $(x - a)$. On calcule le polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$. On achève la résolution en recherchant les solutions de l'équation $Q(x) = 0$.

Illustration.**Une équation de degré 3**

On veut résoudre l'équation de degré 3 : $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$.

- On remarque que $a = 1$ est solution. On factorise le premier membre par $(x - 1)$.

On pose $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$, en développant le second membre, il vient $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = \alpha x^3 + (-\alpha + \beta)x^2 + (-\beta + \gamma)x - \gamma$ et, en identifiant les coefficients des termes de même degré dans les deux membres, $\alpha = 3$, $-\alpha + \beta = -4$, $-\beta + \gamma = 2$ et $-\gamma = -1$.

On en déduit : $\alpha = 3$, $\beta = -1$ et $\gamma = 1$.

- Il reste à résoudre $3x^2 - x + 1 = 0$, le discriminant est $\Delta = -11$, il n'y a pas de solution réelle.
- On conclut : l'équation $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$ a une seule solution réelle 1,
- *Pour ceux qui ont choisi l'option Maths expertes* : l'équation a deux autres solutions dans \mathbb{C} , saurez-vous les trouver ?

Illustration.**Une équation de degré 4**

On veut résoudre l'équation de degré 4 : $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

- On remarque que -1 et 1 sont solutions. On factorise le premier membre par $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$. On écrit $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 - 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$.

En développant puis en identifiant les coefficients des deux membres, on obtient $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = -1$.

- Il reste à résoudre $x^2 + 2x - 1 = 0$, les solutions sont $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 - \sqrt{2}$.
- On conclut : l'équation a quatre solutions : -1 , 1 , $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 - \sqrt{2}$.

Exercice 21.**Equations polynomiales de degré supérieur ou égal à 3****2.3 Inégalités, comparaisons et inéquations****2.3.1 Règles de calcul sur les inégalités****Propriété 2.3.1.****Egalité de nombres réels**

Si x et y sont deux nombres réels tels que $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.

Illustration.**Egalité de nombres réels**

On suppose que x et y sont deux nombres réels tels que $e^{2x} \leq e^{x+y}$ et $e^{2y} \leq e^{x+y}$.

De $e^{2x} \leq e^{x+y}$ et des propriétés de la fonction exponentielle (voir les rappels plus bas), on peut déduire que $e^x \leq e^y$, puis que $x \leq y$. De même, de $e^{2y} \leq e^{x+y}$ on peut déduire que $e^y \leq e^x$, puis que $y \leq x$. Donc $x = y$.

Propriété 2.3.2.**Sommes d'inégalités**

Soient a , b , c et d quatre réels.

Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Remarque 2.3.1.**Différence d'inégalités**

⚠ On ne peut pas faire la différence de deux inéquations.

Par exemple $a = 2 \leq b = 5$ et $c = 0 \leq d = 4$, mais $a - c = 2$ n'est pas inférieur ou égal à $b - d = 1$.

Si $a \leq b$ et $c \leq d$, on peut par contre écrire que $-d \leq -c$ et faire la somme de deux inéquations pour obtenir $a - d \leq b - c$.

Propriété 2.3.3.**Produits d'inégalités**

On suppose que a , b , c et d sont des réels.

1. On suppose que $a \leq b$.

(a) Alors $-b \leq -a$.

(b) Plus généralement, si $c \geq 0$ alors $ca \leq cb$ et si $c \leq 0$ alors $cb \leq ca$.

2. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Illustration.**Comparaisons entre les puissances de $x \in \mathbb{R}_+$**

Soit $x \in [0; +\infty[$. On cherche à montrer que :

1. si $x \in [0; 1]$, alors $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$,
2. si $x \in [1; +\infty[$, alors $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

Ces résultats pourront être retenus et utilisés par la suite.

On peut procéder ainsi.

1.
 - Si $0 \leq x \leq 1$, alors, en multipliant par x qui est positif, on obtient $0 \leq x^2 \leq x$.
 - Si $x \leq 1$ alors $\sqrt{x} \leq 1$ (par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$), et en multipliant par \sqrt{x} qui est positif, on obtient $x \leq \sqrt{x}$.
2.
 - De même, $x \geq 1$ donne, multiplié par x qui est positif, $x^2 \geq x$.
 - Et $x \geq 1$ implique $\sqrt{x} \geq 1$, qui, multiplié par \sqrt{x} qui est positif, donne $x \geq \sqrt{x}$.

Remarque 2.3.2.**Produits d'inéquations**

1. Une conséquence importante de la propriété précédente est la suivante. Pour a et b deux réels non nuls :
 - $ab > 0$ si et seulement si a et b sont de même signe,
 - $ab < 0$ si et seulement si a et b sont de signes opposés.
2. Dans la pratique du 1b) ci-dessus, lors de la multiplication d'une inégalité par une constante, ⚠
on prendra toujours garde au signe de la constante.
3. Dans le 2 de la propriété ci-dessus, l'hypothèse sur le signe de a , b , etc n'est pas facultative. ⚠
On a par exemple $a = -3 \leq b = 1$ et $c = -4 \leq d = 2$, mais $ab = 12$ n'est pas inférieur ou égal à $bd = 2$.

Exercice 22.**Produits d'inégalités****Propriété 2.3.4.****Passage à l'inverse, quotients**

a et b sont des nombres réels.

1. (a) Si $0 < a \leq b$, alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.
(b) Si $a \leq b < 0$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$.
2. Si $0 < a \leq x \leq b$ et si $0 < c \leq y \leq d$, alors $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$.

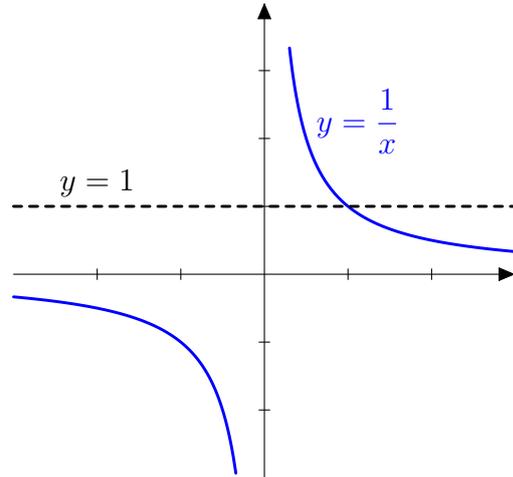
Remarque 2.3.3.**Passage à l'inverse dans une inégalité**

Une inégalité $a \leq b$ n'est pas toujours équivalente à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. Pour pouvoir utiliser la propriété \triangleleft correspondante, il faut savoir que a et b sont non nuls, et de même signe.

Pour $a = -3$ et $b = 8$ par exemple, on a $a < b$, mais $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} < \frac{1}{8}$.

La figure à droite montre la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^* , et la droite d'équation $y = 1$.

Cette fonction est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$, et elle est décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Mais elle n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^* entier.

Illustration.**Passage à l'inverse dans une inégalité**

On cherche les ensembles de solutions des inéquations $\frac{1}{x} \geq 1$ et $\frac{1}{x} \leq 1$.

1. On sait que $x > 0$ équivaut à $\frac{1}{x} > 0$.

Les solutions de $\frac{1}{x} \geq 1 > 0$ sont donc à chercher dans $]0; +\infty[$.

Pour $x > 0$, $\frac{1}{x} \geq 1 \iff 1 = \frac{x}{x} \geq 1 \times x = x$.

Autrement dit, l'ensemble des solutions de $\frac{1}{x} \geq 1$ est $S_1 =]0; 1]$.

Ce résultat est cohérent avec la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ tracée dans la remarque précédente.

2. Pour $\frac{1}{x} \leq 1$, deux cas de figure se présentent : on peut avoir $x > 0$ ou $x < 0$. La méthode de résolution de l'inéquation basée sur cette idée n'est pas la plus simple.

Graphiquement, on "voit" sur la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ tracée dans la remarque précédente que l'ensemble des solutions est $S_2 =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.

Pour obtenir ce résultat algébriquement, le plus simple est d'écrire

$$\frac{1}{x} \leq 1 \iff \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \iff \frac{1-x}{x} \leq 0 \iff \frac{x-1}{x} \geq 0$$

L'inéquation $\frac{x-1}{x} \geq 0$ se résout facilement à l'aide d'un tableau de signes (voir les rappels plus bas), qui donne $\frac{x-1}{x} \geq 0 \iff x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.

On remarque en particulier que $\frac{1}{x} \leq 1$ et $x \geq 1$ ne sont pas équivalents en général.

Exercice 23.**Sommes, produits et quotients d'inégalités****Exercice 24.****Passage à l'inverse, quotients**Remarque 2.3.4.**Inégalités strictes**

Si a et b sont deux réels, alors $a < b$ équivaut à $a \leq b$ et $a \neq b$.

Les propriétés essentielles des inégalités strictes sont les suivantes.

1. Si $a < b$, alors $a \leq b$.
2. Si $a < b \leq c$, alors $a < c$.
3. Si $a < b$ et si $c > 0$, alors $ac < bc$.
4. Si $a < b$ et $c \leq d$, alors $a + c < b + d$.

Illustration.**Inégalités strictes**

On suppose que $2 < x \leq 3$ et que $-2 \leq y \leq -1$. On cherche les meilleurs encadrements possibles de $u = 2x + y$ et de $v = xy - 3$.

- De $4 < 2x \leq 6$ et $-2 \leq y \leq -1$, on déduit que $4 + (-2) < 2x + y \leq 6 + (-1)$, c'est à dire que $2 < u \leq 5$.
- On a $-2 \leq y \leq -1$ et $x \geq 0$, donc $-2x \leq yx \leq -x$.
Par ailleurs, $3 \geq x$ donc $-6 \leq -2x$. Donc $-6 \leq -2x \leq xy$ et $-6 \leq xy$.
Ensuite, $x > 2$ donne $-x < -2$, dont on déduit $xy < -2$.
On peut conclure que $-6 \leq xy < -2$, et que $-9 \leq xy - 3 < -5$.

Exercice 25.**Inégalités strictes****Propriété 2.3.5.****Elever une inégalité au carré**

1. Si $0 \leq a \leq b$, alors $0 \leq a^2 \leq b^2$.
2. Si $a \leq b \leq 0$, alors $a^2 \geq b^2 \geq 0$.

Si a et b ne sont pas de même signe, ou si les signes de a et b ne sont pas connus, on ne peut pas élever l'inéquation $a \leq b$ au carré. 

Remarque 2.3.5.**Carré, racine carrée et valeur absolue**

La propriété précédente permet en particulier de simplifier la résolution d'inégalités qui comportent des valeurs absolues et/ou des racines carrées, grâce aux remarques suivantes :

1. Pour tout x réel positif, $(\sqrt{x})^2 = x$.
2. Pour tout x réel, $|x|^2 = x^2$.

On prendra garde au fait que pour x réel, on a en général $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$.

Illustration.**Elever une inégalité au carré**

Cherchons les x réels tels que $|x - 2| \leq |x - 3|$.

Pour tout x réels, les deux nombres $a = |x - 2|$ et $b = |x - 3|$ sont positifs, donc $|x - 2| \leq |x - 3| \iff |x - 2|^2 \leq |x - 3|^2$.

D'après la remarque précédente, $|x - 2|^2 \leq |x - 3|^2 \iff (x - 2)^2 \leq (x - 3)^2$, qui donne

$$|x - 2|^2 \leq |x - 3|^2 \iff x^2 - 4x + 4 \leq x^2 - 6x + 9 \iff -4x + 4 \leq -6x + 9 \iff 2x - 5 \leq 0$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left] -\infty; \frac{5}{2} \right]$.

Remarque 2.3.6.**Elever une inégalité au carré**

Considérons le raisonnement suivant (qui contient une erreur) :

On cherche l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $\sqrt{3-2x} \leq x$.

On écrit

$$\begin{aligned} \sqrt{3-2x} \leq x &\iff 3-2x \leq x^2 \\ &\iff 0 \leq x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) \\ &\iff x \leq -3 \text{ ou } x \geq 1 \\ &\iff x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[\end{aligned}$$

La première équivalence est fausse, parce que la propriété $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$ ne tient que sous l'hypothèse a et b positifs. Pour $x = -11$ par exemple, on a $3 - 2x = 3 + 22 = 25$ et $\sqrt{3-2x} = \sqrt{25} = 5 > x = -11$. Autrement dit, $x = -11$ n'est pas solution de $\sqrt{3-2x} \leq x$. Même si $3 - 2x = 3 - 2 \times (-11) = 25 \leq x^2 = 11^2 = 121$.

Voici une façon correcte de résoudre l'inéquation $\sqrt{3-2x} \leq x$.

- D'abord, $\sqrt{3-2x}$ n'a de sens que si $3-2x \geq 0$, ce qui équivaut à $x \leq \frac{3}{2}$. Donc les solutions ne sont à chercher que dans l'intervalle $]-\infty; \frac{3}{2}]$.
- Si $x < 0$, alors $\sqrt{3-2x} \geq 0 > x$ et donc x n'est pas solution de $\sqrt{3-2x} \leq x$. Donc les solutions ne sont à chercher que dans l'intervalle $[0; \frac{3}{2}]$.
- Si $x \in [0; \frac{3}{2}]$, alors les deux nombres $a = \sqrt{3-2x}$ et $b = x$ sont positifs, et donc $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$.

Pour les $x \in [0; \frac{3}{2}]$, on a donc

$$\begin{aligned} \sqrt{3-2x} \leq x &\iff 3-2x \leq x^2 \\ &\iff 0 \leq x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) \\ &\iff x \leq -3 \text{ ou } x \geq 1 \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = [1; \frac{3}{2}]$.

Exercice 26.**Comparaisons et carrés****Exercice 27.****Elever une inégalité au carré****Exercice 28.****Elever une inégalité au carré****Exercice 29.****Elever une inégalité au carré**

2.3.2 Valeur absolue

Définition 2.3.1.

Valeur absolue

Pour tout x réel, on appelle valeur absolue de x le nombre noté $|x|$ et défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} .$$

Remarque 2.3.7.

Interprétation géométrique de la valeur absolue

Si x est un nombre réel, alors la valeur absolue de x désigne la distance de x à 0 sur l'axe réel.

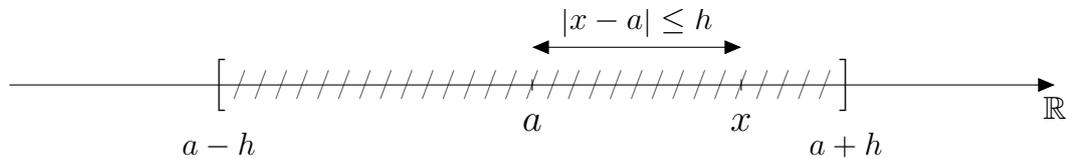


Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ est la distance de x à 0.

Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$ est la distance de x à 0.

Par conséquent, si x et un nombre réel, x et $y = -x$ ont la même valeur absolue.

De façon générale, la valeur absolue de $|x - a|$ représente la distance de a à x . En particulier, si a est un réel et h un réel positif, alors $|x - a| \leq h$ équivaut à $x \in [a - h; a + h]$.



Représentation de l'ensemble des solutions de $|x - a| \leq h$ dans \mathbb{R} .

Illustration.

Valeur absolue de $x - a$

Cherchons les réels y tels que $|y - 1| \leq 2$.

Il faut prendre garde au fait que

$$|y - 1| = \begin{cases} y - 1 & \text{si } y - 1 \geq 0 \\ -(y - 1) & \text{si } y - 1 \leq 0 \end{cases}$$

(En particulier, la disjonction ne se fait pas en fonction du signe de y .)

Autrement dit, $|y - 1| = \begin{cases} y - 1 & \text{si } y \geq 1 \\ 1 - y & \text{si } y \leq 1 \end{cases} .$

Notons S_y l'ensemble des solutions.

On résout l'inéquation dans chacun des 2 cas : $y \geq 1$ et $y \leq 1$.

- | | |
|--|---|
| <p>1. Si $y \geq 1$, alors $y - 1 = y - 1$ et $y - 1 \leq 2$ équivaut à $y - 1 \leq 2$ et à $y \leq 3$.
Donc $S_y \cap [1; +\infty[= [1; 3]$.</p> | <p>2. De même, si $y \leq 1$, alors $y - 1 = 1 - y$ et $y - 1 \leq 2$ équivaut à $1 - y \leq 2$ et à $-1 \leq y$.
Donc $S_y \cap]-\infty; 1] = [-1; 1]$.</p> |
|--|---|

On conclut que $S_y = [-1; 3]$.

Méthode.**Résoudre une équation avec des valeurs absolues**

Pour tous réels a et b :

$$|a| = |b| \iff [a = b \text{ ou } a = -b] \quad \text{et} \quad |a| = b \iff \begin{cases} b \geq 0 \\ [a = b \text{ ou } a = -b] \end{cases}$$

*Illustration.***Résoudre une équation avec des valeurs absolues**

Cherchons les solutions de $|x + 2| = x$, et les solutions de $|x - 1| = |x - 3|$.

$$\bullet \quad |x + 2| = x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ (x + 2) = x \text{ ou } -(x + 2) = x \end{cases}$$

Si $x \geq 0$, alors $x + 2 > 0$ et $-(x + 2) < 0$, ce qui donne $-(x + 2) \neq x$. Autrement dit, $x \geq 0$ et $x = -(x + 2)$ est impossible.

Par conséquent, $|x + 2| = x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2 = x \end{cases}$. L'équation $x + 2 = x$ n'admet pas de solution réelle.

On conclut qu'il n'existe aucun x réel tel que $|x + 2| = x$.

- Soit x un nombre réel.

Comme $|x - 1|$ et $|x + 3|$ sont de même signe (positif), on a $|x - 1| = |x + 3| \iff |x - 1|^2 = |x + 3|^2$.

Et comme pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|y|^2 = y^2$, on a $|x - 1| = |x + 3| \iff (x - 1)^2 = (x + 3)^2$.

Avec $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ et $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, on en déduit que

$$|x - 1| = |x + 3| \iff -2x + 1 = 6x + 9 \iff 0 = 8x + 8 \iff x = -1.$$

On conclut qu'il existe un unique nombre réel tel que $|x - 1| = |x + 3|$, qui est $x = -1$.

Exercice 30. Résoudre une équation ou une inéquation avec des valeurs absolues

Exercice 31. Résoudre une équation ou une inéquation avec des valeurs absolues

Exercice 32. Sommes, différences d'inégalités et valeur absolue

Exercice 33. Opérations algébriques et valeurs absolues

2.3.3 Signe d'une somme, d'un produit, d'un quotient**Méthode.****Etudier le signe d'un produit, d'un quotient**

Pour déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient, on étudie séparément le signe de chacun de ses facteurs.

*Illustration.***Etudier le signe d'un produit, d'un quotient**

On veut déterminer le signe de $f(x) = \frac{x(e^x - 2)}{1 + x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On étudie séparément les signes de $A = x$, de $B = e^x - 2$ et de $C = 1 + x$. On rassemble ces résultats dans un tableau de signes et on en déduit le signe de $f(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

x	-1	0	$\ln(2)$		
x	-	-	0	+	+
$e^x - 2$	-	-	-	0	+
$1 + x$	-	0	+	+	+
$f(x)$	-		+	0	-
			0		+

Exercice 34.**Etude du signe d'une différence****Exercice 35.****Etudier le signe d'un produit, d'un quotient****Méthode.****Etudier le signe d'une somme ou d'une différence**

Quand on étudie le signe d'une somme, deux cas de figure se présentent.

- Si tous les termes de la somme sont de même signe, alors la somme a le même signe que ses termes.
- Si des termes de signes différents apparaissent dans la somme, on réduit au même dénominateur et on factorise¹ et on utilise la méthode précédente pour étudier son signe.

A ces méthodes s'ajouteront des méthodes d'analyse, liées à l'étude de fonctions.

Illustration.**Signe d'une somme, d'une différence**

On cherche à montrer que

1. pour tout a réel et pour tout x réel, $P = 3a^2 + \frac{a^2}{x^2 + 1}$ est positif,

2. pour tout a réel et pour tout x réel, $R = \cos(x)\sin(a) - \cos(x) + \sin(a) - 1$ est négatif.

On peut procéder ainsi.

1. Pour tout a réel, $3a^2$ est positif. Pour tout x réel, $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ et $a^2 \geq 0$, donc $\frac{a^2}{x^2 + 1}$ est positif. Comme somme de deux termes positifs, P est positif.
2.
 - On sait que pour tout x réel, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, et que pour tout a réel, $-1 \leq \sin(a) \leq 1$. Les différents termes de la somme qui définit R sont de signe variable (selon les valeurs de x et de a), et la méthode utilisée pour P ne fonctionne pas.
 - On cherche donc à factoriser l'expression de R .

$$R = \cos(x)\sin(a) - \cos(x) + \sin(a) - 1 = \cos(x) \times [\sin(a) - 1] + \sin(a) - 1$$

$$= [\cos(x) + 1] \times [\sin(a) - 1].$$
 - Pour tout x réel et pour tout a réel, $\cos(x) + 1 \geq 0$ et $\sin(a) - 1 \leq 0$, et donc $R \leq 0$.

Méthode.**Prouver une inégalité ou résoudre une inéquation en se ramenant à un problème de signe**

En raison de la simplicité de la règle sur le signe d'un produit ou d'un quotient, il peut être avantageux de transformer la résolution d'une inégalité quelconque au départ en un problème de signe.

Illustration.**Comparer deux nombres réels**

On souhaite déterminer lequel des deux nombres réels $a = \frac{5}{3}$ et $b = \frac{7}{5}$ est supérieur à l'autre.

On détermine le signe de la différence $\frac{5}{3} - \frac{7}{5} = \frac{25}{15} - \frac{21}{15} = \frac{4}{15} \geq 0$. On en déduit que $\frac{5}{3} \geq \frac{7}{5}$.

1. Conséquence : Quand on calcule une dérivée, sauf exception, on développe le moins possible.

*Illustration.***Résoudre une inéquation en se ramenant à un problème de signe**

On cherche les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{x}{x+1} \geq 2$.

Il est nécessaire que $x \neq -1$. On pourrait distinguer les x pour lesquels $x+1 > 0$ et ceux pour lesquels $x+1 < 0$, et résoudre l'inéquation dans chacun des deux cas. Il est plus simple d'écrire

$$\frac{x}{x+1} \geq 2 \iff \frac{x}{x+1} - 2 \geq 0 \iff \frac{x - 2(x+1)}{x+1} = \frac{-x-2}{x+1} \geq 0 \iff \frac{x+2}{x+1} \leq 0.$$

A l'aide d'un tableau de signes, on en déduit sans difficulté que l'ensemble des solutions est $S = [-2; -1[$.

Exercice 36.**Comparaisons****Exercice 37.****Se ramener à une étude de signe****2.3.4 Inéquations du second degré****Propriété 2.3.6.****Signe d'un trinôme du second degré**

On suppose que a, b et c sont trois réels, et que $a \neq 0$. On note $P(x) = ax^2 + bx + c$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ a le signe de a .

2. Si $\Delta = 0$ et $x_0 = \frac{-b}{2a}$, alors

- $P(x)$ a le signe de a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$
- et $P(x_0) = 0$.

3. Si $\Delta > 0$, et si $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, alors

- $P(x)$ a le signe de a sur $] -\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$,
- $P(x)$ a le signe de $-a$ sur $]x_1; x_2[$,
- et $P(x_1) = P(x_2) = 0$.

*Illustration.***Signe d'un trinôme du second degré**

On suppose que a, b et c sont trois réels, que $a \neq 0$ et que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions $x_1 < x_2$.

On note $P(x) = ax^2 + bx + c$. On cherche à déterminer le signe de $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

On sait que P a le signe de a sur l'ensemble $] -\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$, et l'opposé du signe de a sur l'intervalle $]x_1; x_2[$. Il suffit donc de déterminer si $\frac{x_1 + x_2}{2} \in]x_1; x_2[$ ou non.

On a $x_1 < x_2$, donc $2x_1 < x_1 + x_2 < 2x_2$ et $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$. Donc $\frac{x_1 + x_2}{2} \in]x_1; x_2[$, et $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ a pour signe l'opposé du signe de a .

Exercice 38.**Signe d'un trinôme du second degré**

Méthode.**Résolution d'une inéquation du second degré**

Pour résoudre une inéquation du second degré, on se ramène à l'étude du signe d'un trinôme.

*Illustration.***Résolution d'une inéquation du second degré**

Cherchons les solutions de $x^2 + 2x - 5 \geq (x - 1)(2 - x)$.

On calcule pour commencer $(x - 1)(2 - x) = -2 + 3x - x^2$. On en déduit que

$$x^2 + 2x - 5 \geq (x - 1)(2 - x) \iff x^2 + 2x - 5 \geq -2 + 3x - x^2 \iff 2x^2 - x - 3 \geq 0$$

Avec $\Delta = (-1)^2 + 4 \times 3 \times 2 = 25$, on en déduit que les solutions de $2x^2 - x - 3 = 0$ sont

$$x_1 = \frac{1 - 5}{4} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{1 + 5}{4} = \frac{3}{2}.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de $2x^2 - x - 3 \geq 0$ est $S =] - \infty; -1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty \right[$.

Exercice 39.**Résolution d'une inéquation du second degré****Exercice 40.****Inéquations qui se ramènent à une équation du second degré****Propriété 2.3.7.****Le carré d'un réel est positif**

Si x est un nombre réel, alors $x^2 \geq 0$.

*Illustration.***Le carré d'un réel est positif**

On cherche à montrer que pour tout $a > 0$, $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

On remarque que pour tout $a > 0$, on a $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$.

On en déduit que pour tout $a > 0$ on a $a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0$ et $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Exercice 41.**Le carré d'un réel est positif***Remarque 2.3.8.***Somme nulle de termes positifs**

Si a et b sont deux nombres positifs et si $a + b = 0$, alors $a = b = 0$.

En effet, avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a $0 = a + b \geq b \geq 0$ qui donne $b = 0$, et $0 = a + b \geq a \geq 0$ qui donne $a = 0$.

*Illustration.***Somme nulle de termes positifs**

On cherche les x et y réels tels que $x^2 + 2xy + 2y^2 = 0$.

On remarque que $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, dont on déduit que $x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2$.

Ainsi $x^2 + 2xy + 2y^2 = 0$ équivaut à $(x + y)^2 + y^2 = 0$, qui donne (d'après la remarque précédente),

$(x + y)^2 = 0$ et $y^2 = 0$. On en déduit que $\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, et donc que $x = y = 0$.

En conclusion, $x = y = 0$ est l'unique solution de $x^2 + 2xy + 2y^2 = 0$.

2.4 Règles de calcul sur les puissances, logarithmes et exponentielles

2.4.1 Puissances

Définition 2.4.1.

Puissances d'un réel

1. Pour tout entier n supérieur à 1, on pose $0^n = 0$.
2. Pour tout nombre x réel non nul, on pose $x^0 = 1$ et, pour tout n entier naturel $x^{n+1} = x^n \times x$.
3. Pour tout nombre x réel non nul :

(a) on pose $x^{-1} = \frac{1}{x}$,

(b) et plus généralement, pour tout n entier naturel, on pose $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Propriété 2.4.1.

Puissance d'un produit, d'un quotient

On suppose que a et b sont deux nombres réels non nuls, et que n et m sont deux entiers relatifs. Alors :

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$

3. $(ab)^n = a^n \times b^n$

2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Propriété 2.4.2.

Puissance d'une puissance

On suppose que a est un nombre réel non nul, et que n et m sont deux entiers relatifs.

Alors $(a^n)^m = a^{n \times m}$.

Illustration.

Puissances de (-1) , puissances d'un nombre négatif

Etudions les valeurs de $u_n = (-1)^n$ en fonction de n .

- On commence par remarquer que $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$.

- Si n est un entier pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$.

Alors, $(-1)^n = (-1)^{2k} = \left((-1)^2\right)^k = 1^k = 1$.

- Si n est un entier impair, alors il existe un entier j tel que $n = 2j + 1$.

Alors, $(-1)^n = (-1)^{2j+1} = (-1)^{2j} \times (-1)^1 = \left((-1)^2\right)^j \times (-1) = 1^j \times (-1) = -1$.

- On conclut que $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

On en déduit également que : $(-a)^n = (-1)^n a^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. On remarque aussi l'importance des parenthèses dans une expression de la forme $(-a)^n$.

Illustration.**Simplification de produits et quotients de puissances**

$$\text{Simplifier } A = \left(\frac{(7 \times 2)^3}{3^2 \times 7} \right)^{-1}$$

Les différentes simplifications peuvent être faites dans différents ordres.

$$\text{En utilisant } \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} = \frac{b}{a}, \text{ on obtient } A = \frac{3^2 \times 7}{(7 \times 2)^3}. \text{ Avec } (a \times b)^3 = a^3 \times b^3, \text{ on en déduit}$$

$$A = \frac{3^2 \times 7}{7^3 \times 2^3}.$$

$$\text{On conclut que } A = 3^2 \times 7 \times 7^{-3} \times 2^{-3} = 2^{-3} \times 3^2 \times 7^{1-3} = \frac{3^2}{2^3 \times 7^2} = \frac{9}{392}.$$

Exercice 42.**Simplifications d'expressions avec des puissances de 10****Exercice 43.****Notation scientifique et simplification d'expressions****Exercice 44.****Simplification de produits et quotients de puissances**Remarque 2.4.1.**Règles de priorité pour les expressions comprenant des puissances**

- Les puissances sont prioritaires sur les sommes et différences, les produits et les quotients.

Par exemple

$$\left(\frac{a \times b}{c} \right)^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2} \neq \frac{(a \times b)^2}{c} = \frac{a^2 b^2}{c} \neq \frac{a \times b^2}{c}$$

et

$$3(a + b)^2 = 3(a^2 + 2ab + b^2) = 3a^2 + 6ab + 3b^2$$

$$\neq (3(a + b))^2 = 3^2 \times (a + b)^2 = 9(a^2 + 2ab + b^2) = 9a^2 + 18ab + 9b^2$$

$$\neq 3(a + b^2) = 3a + 3b^2$$

- L'opération d'élevation à une puissance n'est pas associative :

$$(a^b)^c = a^{bc} \neq a^{(b^c)} = a^{b \times b \times b \times \dots \times b}.$$

$$\text{Par exemple, } (2^3)^4 = 8^4 = 4096 \neq 2^{(3^4)} = 2^{81} = 2417851639229258349412352.$$

Par défaut, en l'absence de parenthèse, l'expression a^{b^c} est à comprendre comme $a^{b^c} = a^{(b^c)}$. En présence d'une expression de la forme $(a^b)^c$, on effectuera toujours la simplification $(a^b)^c = a^{bc}$.

Illustration.**Puissance de puissance**

Considérons les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 2$, et $u_{n+1} = u_n^2$ et $v_{n+1} = 2^{v_n}$.

Calculons les premiers termes de ces suites.

- $u_1 = u_0^2 = 2^2$, et $v_1 = 2^{v_0} = 2^2$.
- $u_2 = u_1^2 = (2^2)^2 = 2^{2 \times 2} = 2^4$, et $v_2 = 2^{v_1} = 2^{(2^2)} = 2^4$.
- $u_3 = u_2^2 = (2^4)^2 = 2^{4 \times 2} = 2^8$ et $v_3 = 2^{v_2} = 2^{(2^4)} = 2^{16}$.
- $u_4 = u_3^2 = (2^8)^2 = 2^{8 \times 2} = 2^{16}$ et $v_4 = 2^{v_3} = 2^{(2^{16})} = 2^{65536}$.
- $u_5 = u_4^2 = (2^{16})^2 = 2^{16 \times 2} = 2^{32}$ et $v_5 = 2^{v_4} = 2^{(2^{65536})}$.

Avec une taille de police standard, il faut plus d'une page A4 pour écrire en base 10 le nombre 2^{65536} .

Exercice 45.**Simplification de puissances de puissances**Remarque 2.4.2.**Puissances d'une somme**

⚠ La puissance n ième d'une somme n'est pas donnée par la somme des puissances n îèmes.
Par exemple

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \neq a^3 + b^3$$

2.4.2 Racines carrées**Définition 2.4.2.****Racine carrée**

Si x est un nombre réel positif, il existe un unique nombre réel positif a tel que $a^2 = x$. On dit que a est la racine carrée de x et on note $a = \sqrt{x}$, ou $a = x^{1/2}$.

En particulier, pour tout $x \geq 0$, on aura $(\sqrt{x})^2 = x$.

Remarque 2.4.3.**Puissance $1/n$ et racine n ième d'un réel positif**

Plus généralement, si x est un réel positif et si n est un entier supérieur ou égal à 1, il existe un unique réel positif a tel que $a^n = x$. On note $a = \sqrt[n]{x}$ ou $a = x^{1/n}$.

En particulier, on aura $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

Illustration.**Carrés et racines carrées**

Soit $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Vérifions que A est bien défini et simplifions son expression.

- Comme $0 < 3 < 4$, et comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , on a $0 < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$. En particulier, $2 - \sqrt{3} \geq 0$, et $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ et A sont bien définis.
- Le calcul donne

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^2 \\ &= (2 + \sqrt{3}) - 2 \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{2 - \sqrt{3}} + (2 - \sqrt{3}) \\ &= 4 - 2 \times \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ &= 4 - 2 \times \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= 4 - 2 \times \sqrt{4 - 3} \\ &= 4 - 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

- On a montré que $A^2 = 2$. Il reste à déterminer si $A \geq 0$ ou si $A \leq 0$.
Comme $\sqrt{3} \geq 0$, on a $2 + \sqrt{3} \geq 2 - \sqrt{3}$ et donc $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \geq \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Donc $A \geq 0$.
On en déduit que $A = \sqrt{2}$.

Remarque 2.4.4.**Carré et racine carrée**

Si $a \geq 0$, alors $(\sqrt{a})^2 = a$.

Mais, pour a réel quelconque, on a seulement $\sqrt{a^2} = |a|$, et $\sqrt{a^2} \neq a$ en général. Par exemple, pour $a = -3$, on a $a^2 = 9$ et $\sqrt{a^2} = \sqrt{9} = 3 = |a| = -a \neq a$.

Exercice 46.**Carré et racine carrée****Propriété 2.4.3.****Racine carrée d'un produit, d'un quotient, d'une puissance**

Soient a et b deux réels strictement positifs.

$$1. \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$2. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Remarque 2.4.5.**Racine carrée d'un produit**

Si a et b sont deux réels négatifs, alors \sqrt{ab} a un sens, mais \sqrt{a} et \sqrt{b} ne sont pas définis.  Autrement dit, le fait que \sqrt{ab} existe ne suffit pas à ce que la formule $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ soit correcte.

Illustration.**Simplification de produit et quotient avec des racines carrées**

Soient $A = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$ et $B = 3\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{125}$.

On calcule :

$$\bullet A = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3} = 2 \times (\sqrt{3})^2 = 6$$

$$\bullet B = 3\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{125} = 3\sqrt{5} - \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{25} \times \sqrt{5} = (3 - 2 + 5) \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Exercice 47.**Racine carrée d'un produit, d'un quotient, d'une puissance****Méthode.****Résoudre une équation avec des racines carrées**

Pour tous réels a et b :

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^2 \end{cases}$$

Exercice 48.**Résoudre des équations avec des racines carrées***Illustration.***Carré d'une somme, racine carrée d'une somme**

⚠ Vous savez que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$ en général. On en déduit que en général $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{x + y}$. On a par exemple

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

Cherchons les x et y réels pour lesquels $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y}$.

- Pour que \sqrt{x} et \sqrt{y} soient définis, il est nécessaire que $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Dans ce cas, on a $x + y \geq 0$, et $\sqrt{x + y}$ est également bien défini.

- Par définition, $(\sqrt{x + y})^2 = x + y$.

D'autre part, la formule $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ donne

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

On en déduit que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y}$ implique $x + y = x + y + 2\sqrt{xy}$, et donc $\sqrt{xy} = 0$.

Enfin, $\sqrt{xy} = 0$ implique $(\sqrt{xy})^2 = xy = 0$, qui implique $(x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

- Réciproquement, si $x = 0$ ou si $y = 0$, on a bien $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y}$.

On conclut que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y}$ si et seulement si $(x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

On constate bien qu'en général, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{x + y}$.

Définition 2.4.3.**Quantité conjuguée**

Soient x et y deux réels positifs.

Si $A = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, on appelle quantité conjuguée de A le nombre $B = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

De même, si $B = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, on appelle quantité conjuguée de B le nombre $A = \sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Propriété 2.4.4.**Quantité conjuguée**

Soient x et y deux réels positifs, et $A = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ et $B = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ deux quantités conjuguées.

Alors

$$A \times B = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Méthode.**Utiliser une quantité conjuguée**

Les quantités conjuguées sont utiles pour transformer des expressions contenant des sommes ou des différences de racines carrées.

*Illustration.***Simplifier une expression en utilisant la quantité conjuguée**

Simplifier $A = \frac{1}{2\sqrt{5} + 2}$.

On cherche une expression de A sans racine carrée au dénominateur. On utilise la quantité conjuguée de $2\sqrt{5} + 2$ pour trouver une expression de $\frac{1}{2\sqrt{5} + 2}$ de la forme $a + b\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\sqrt{5} + 2} \\ &= \frac{2\sqrt{5} - 2}{(2\sqrt{5} + 2)(2\sqrt{5} - 2)} = \frac{2\sqrt{5} - 2}{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = \frac{2\sqrt{5} - 2}{20 - 4} \\ &= \frac{2\sqrt{5} - 2}{16} \end{aligned}$$

*Illustration.***Transformation de l'expression et étude d'une fonction en utilisant la quantité conjuguée**

Montrons que la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ est décroissante sur \mathbb{R}^+ et admet pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

On introduit la quantité conjuguée : pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

- Etudions la limite de f en $+\infty$.

Pour tout $x > 0$, $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$, et $0 < \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, le théorème de convergence par encadrement donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

- Montrons que f est décroissante.

Soient $x \geq 0$ et $y \geq 0$ tels que $x \leq y$.

Alors $0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$, et $1 \leq x+1 \leq y+1$, qui donne $1 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{y+1}$. Par somme, on en déduit que $0 < \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \leq \sqrt{y+1} + \sqrt{y}$.

Par passage à l'inverse, on en déduit que $0 < \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{y+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$, c'est à dire que $0 < f(y) \leq f(x)$.

On a montré que $0 \leq x \leq y$ implique $f(y) \leq f(x)$, ce qui signifie que f est décroissante sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 49.**Utiliser la quantité conjuguée**

Exercice 50.**Racines carrées et fractions****2.4.3 Fonction exponentielle****Propriété 2.4.5.****Fonction exp**

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que $f(0) = 1$ et telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$.

On l'appelle fonction exponentielle, notée \exp .

Propriété 2.4.6.**Propriété fondamentale de l'exponentielle**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Propriété 2.4.7.**Propriétés algébriques de l'exponentielle**

$$1. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$.

$$2. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } y \in \mathbb{R}, \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

$$3. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{Z}, (\exp(x))^n = \exp(nx).$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Remarque 2.4.6.**Nombre e et notation e^x**

On pose $e = \exp(1)$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $e^x = \exp(x)$. Ce nombre a pour valeur approchée $e \approx 2,71$.

La propriété fondamentale de l'exponentielle s'écrit alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x e^y.$$

On remarquera l'analogie avec la formule connue, valable pour tout $a > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a^{n+m} = a^n a^m$.

Les autres propriétés ci-dessus se réécrivent : $e^0 = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,

puis $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ et enfin $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, e^{nx} = (e^x)^n$.

Pour $n = \frac{1}{2}$, la dernière formule se prolonge en $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{e^x} = e^{x/2}$.

Illustration.**Propriétés algébriques de l'exponentielle**

$$\text{Simplifions } A = \frac{e^{3x-2y}}{(e^{x+y})^2 \times e^{-3y}}.$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^{3x-2y}}{(e^{x+y})^2 \times e^{-3y}} \\ &= \frac{e^{3x-2y}}{e^{(x+y) \times 2} \times e^{-3y}} = \frac{e^{3x-2y}}{e^{2x+2y} \times e^{-3y}} \\ &= \frac{e^{3x-2y}}{e^{2x+2y-3y}} = \frac{e^{3x-2y}}{e^{2x-y}} \\ &= e^{3x-2y} \frac{1}{e^{2x-y}} = e^{3x-2y} e^{-(2x-y)} = e^{3x-2y} e^{-2x+y} \\ &= e^{x-y} \end{aligned}$$

Exercice 51.**Propriétés algébriques de l'exponentielle***Illustration.***Résolution d'équation avec exponentielle**

On cherche les solutions $x \in \mathbb{R}$ de $|e^{-2x} - 1| = 5$.

- On sait que pour $a \in \mathbb{R}$, $|a| = 5$ équivaut à $a = 5$ ou $a = -5$.

Les solutions de $|e^{-2x} - 1| = 5$ sont donc les $x \in \mathbb{R}$ tels que $e^{-2x} - 1 = 5$ ou $e^{-2x} - 1 = -5$.

- L'équation $e^{-2x} - 1 = -5$ équivaut à $e^{-2x} = -4$ qui n'a pas de solution réelle, car $e^t > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- L'équation $e^{-2x} - 1 = 5$ équivaut à $e^{-2x} = 6$, qui équivaut à $-2x = \ln(6)$, et à $x = -\frac{1}{2} \ln(6)$.

On conclut que $|e^{-2x} - 1| = 5$ admet une unique solution réelle, qui est $x = -\frac{\ln(6)}{2}$.

Exercice 52.**Résolution d'équation avec exponentielle****Exercice 53.****Equations avec exponentielle****Exercice 54.****Résolution d'inéquations avec exponentielle****2.4.4 Fonction logarithme népérien****Propriété 2.4.8.****Définition et propriétés fondamentales du logarithme népérien**

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Par conséquent, pour tout $y \in]0; +\infty[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x = y$. On appelle ce nombre x le logarithme de y , et on note $x = \ln(y)$.

On a donc

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, e^x = t \iff x = \ln(t),$$

$$\forall t > 0, e^{\ln(t)} = t \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x = \ln(e^x).$$

Propriété 2.4.9.**Propriétés du logarithme**

1. La fonction \ln est définie et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$ et $y \in]0; +\infty[$,

$$x = y \iff \ln(x) = \ln(y) \quad \text{et} \quad x < y \iff \ln(x) < \ln(y).$$

2. $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

3. Pour tout $x \in]0; 1[$, $\ln(x) < 0$, et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\ln(x) > 0$.

Propriété 2.4.10.**Propriétés algébriques du logarithme**

1. $\forall x > 0, \forall y > 0, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$

2. $\forall x > 0, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$

3. $\forall x > 0, \forall y > 0, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$

4. $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = n \ln(x).$

5. $\forall x > 0, \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x).$

Exercice 55.**Propriétés algébriques du logarithme et de l'exponentielle****Exercice 56.****Propriétés algébriques du logarithme***Illustration.***Résolution d'équation et inéquations avec logarithme**

On cherche les solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'équation $\ln(x^2 - 4) = \ln(5x + 2).$

- La fonction \ln n'étant définie que sur \mathbb{R}_*^+ , l'équation n'a de sens que si $x^2 - 4 > 0$ et $5x + 2 > 0$.

– L'inégalité $x^2 > 4$ a pour solutions $] -\infty; -2[\cup]2; +\infty[.$

– L'inégalité $5x + 2 > 0$ a pour solutions $] -2/5; +\infty[.$

Finalement, comme $\frac{-2}{5} > -2$, l'équation $\ln(x^2 - 4) = \ln(5x + 2)$ n'a de sens que si $x > 2$.

- Supposons que $x > 2$.

– Alors $x^2 - 4 > 0$ et $5x + 2 > 0$, et donc $\ln(x^2 - 4) = \ln(5x + 2) \iff x^2 - 4 = 5x + 2$.

Cette équation équivaut à $x^2 - 5x - 6 = 0$.

– On résout l'équation $x^2 - 5x - 6 = 0$.

On calcule $\Delta = (-5)^2 + 4 \times 1 \times 6 = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0$.

On en déduit que l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

– Comme $-1 \notin]2; +\infty[$, $x_2 = -1$ n'est pas solution de $\ln(x^2 - 4) = \ln(5x + 2)$. Par contre $x_1 = 6 \in]2; +\infty[$, et x_1 est solution de $\ln(x^2 - 4) = \ln(5x + 2)$.

- Conclusion :

L'équation $\ln(x^2 - 4) = \ln(5x + 2)$ admet une unique solution réelle, qui est $x = 6$.

Exercice 57.**Equations et inéquations avec logarithme****Exercice 58.****Equations et inéquations avec logarithme**

2.5 Études de fonctions

Remarque 2.5.1.

Etude de fonction, notations

On montre dans cette section comment étudier une fonction de la variable réelle à valeurs réelles. Cette fonction f associe à un réel x une image notée $f(x)$, le plus souvent la fonction est donnée par l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

2.5.1 Domaine de définition

Définition 2.5.1.

Domaine de définition

Le domaine de définition de f est l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe. Le plus souvent, ce domaine est l'union d'un nombre fini d'intervalles de \mathbb{R} .

Illustration.

Déterminer un domaine de définition

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 2x - 3}$$

- Le numérateur \sqrt{x} existe si et seulement si $x \geq 0$.
- On cherche à quelle condition le dénominateur est non nul.
On résout : $x^2 + 2x - 3 = 0$, on obtient deux solutions -3 et 1 .
- On conclut : f est définie sur $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2. Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$$

- $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 + 2x - 3 > 0$.
Les racines de $x^2 + 2x - 3$ sont -3 et 1 . Le coefficient de x^2 est égal à 1 donc il est positif.
On en déduit que $x^2 + 2x - 3$ est positif si et seulement si x n'appartient pas à l'intervalle entre les racines $[-3; 1]$.
- Le domaine de définition de f est donc $D =]-\infty; -3[\cup]1, +\infty[$.

2.5.2 Sens de variation

Définition 2.5.2.

Sens de variation

1. Une fonction f est constante sur un intervalle I si et seulement si, pour tous x et x' dans I , $f(x) = f(x')$.
2. Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si et seulement si, pour tous x et x' dans I , si $x \leq x'$ alors $f(x) \leq f(x')$.
3. Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si et seulement si, pour tous x et x' dans I , si $x \leq x'$ alors $f(x) \geq f(x')$.

2.5.3 Dérivée

Définition 2.5.3.

Dérivabilité en un point a

Soit f une fonction d'un intervalle I de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et a un point de I .

f est dérivable en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

Sous cette hypothèse, on pose $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et on dit que $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a .

On remarque que, par le changement de variable $x = a + h$, on a aussi $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ s'appelle un taux d'accroissement de f en a et $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a .

Définition 2.5.4.

Tangente

Lorsque f est dérivable en a , sa courbe admet, au point d'abscisse a , une tangente qui est la droite d'équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Illustration.

Étude de la dérivabilité et tangente en un point particulier

Prouver que la fonction définie par $f(x) = (x - 2)\sqrt{x - 2}$ est dérivable en $a = 2$ et donner $f'(2)$. Préciser la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

On forme le taux d'accroissement de f en 2.

Comme $f(2) = 0$, en simplifiant, on a : $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \sqrt{x - 2}$. En conséquence,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0.$$

On en déduit que f est dérivable en 2 et $f'(2) = 0$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 passe par le point de coordonnées $(2, f(2)) = (2, 0)$ et a pour coefficient directeur 0, c'est le premier axe.

Illustration.

Tangentes

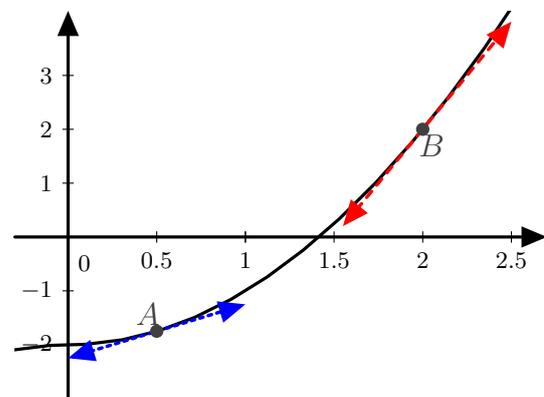
La fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Le réel $a = \frac{1}{2}$ a pour image $f(a) = -\frac{7}{4}$, et le point $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ appartient à la courbe de f .

En ce point, la dérivée vaut $f'(a) = 2a = 1$ et l'équation de la tangente est $y = -\frac{7}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)$ ce qui équivaut à

$$y = x - \frac{9}{4}$$

De même en $b = 2$: le point $B(2, 2)$ appartient à \mathcal{C}_f , la dérivée en $b = 2$ vaut $f'(2) = 2 \times 2 = 4$ et la tangente en B a pour équation $y = 4x - 6$.



Courbe de $f : x \mapsto x^2 - 2$ et tangentes aux points d'abscisses $a = 0.5$ et $b = 2$.

Méthode.**Tracer la tangente à une courbe en un point**

Une tangente peut être tracée en utilisant son coefficient directeur et le point $(a, f(a))$ de la courbe de f par lequel elle passe.

Lorsqu'on construit la courbe représentative d'une fonction, on trace en particulier les tangentes parallèles au premier axe, qui correspondent aux valeurs de la variable où la dérivée s'annule.

Définition 2.5.5.**Fonction dérivée**

Lorsque f est dérivable en tout point de I , on définit la fonction dérivée de f notée f' .

Théorème 2.5.1.**Dérivée et sens de variation**

1. Une fonction f est constante sur un intervalle I si et seulement si, pour tout x de I , $f'(x) = 0$.
2. Une fonction f dérivable est croissante sur un intervalle I si et seulement si, pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$.
3. Une fonction f dérivable est décroissante sur un intervalle I si et seulement si, pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$.

2.5.4 Calcul de dérivées, tableaux de variations**Méthode.****Calcul des fonctions dérivées**

Pour le calcul de dérivées, on utilise les dérivées des fonctions usuelles (voir tableau ci-dessous), et on utilise les formules concernant dérivation et opérations sur les fonctions (voir les propriétés suivantes).

Propriété 2.5.2.**Dérivées des fonctions usuelles**

Intervalle I	fonction $f : x \mapsto f(x)$	Dérivée $f'(x)$
\mathbb{R}	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
\mathbb{R}^*	$f(x) = x^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -nx^{-(n+1)}$
\mathbb{R}^*	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
\mathbb{R}^{*+}	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
\mathbb{R}	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
\mathbb{R}^{*+}	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
\mathbb{R}	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
\mathbb{R}	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$

Propriété 2.5.3.**Dérivée d'une combinaison linéaire**

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en sur un intervalle I . Soient α et β deux réels, et h la combinaison linéaire $h = \alpha f + \beta g$.

Alors h est dérivable sur I , et

$$h' = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

Propriété 2.5.4.**Dérivée d'un produit, d'un quotient**

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors :

1. $f \times g$ est dérivable sur I et

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

2. Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Propriété 2.5.5.**Dérivée des fonctions composées types**

Ici u désigne une fonction dérivable sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs réelles.

hypothèse sur $u : x \mapsto u(x)$	fonction $f : x \mapsto f(x)$	dérivée $f'(x)$
	$f(x) = u^n(x), n \geq 0$	$f'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$
$\forall x \in I, u(x) \neq 0$	$f(x) = \frac{1}{u^n(x)}, n \geq 2$	$f'(x) = -n \frac{u'(x)}{u^{n+1}(x)}$
$\forall x \in I, u(x) > 0$	$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
	$f(x) = e^{u(x)},$	$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
$\forall x \in I, u(x) > 0$	$f(x) = \ln(u(x)),$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
	$f(x) = \cos(u(x)),$	$f'(x) = -u'(x) \sin(u(x))$
	$f(x) = \sin(u(x)),$	$f'(x) = u'(x) \cos(u(x))$

*Illustration.***Domaines de définition et de dérivabilité, calcul de dérivée**

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction définie par :

1. $f(x) = xe^{1/x}$.

La fonction $x \mapsto x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* donc la fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* .

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = e^{1/x} + x \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x} = \frac{x-1}{x} e^{1/x}$.

2. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right)$

- La fonction $u : x \mapsto \frac{1+x}{2-x}$ est définie et dérivable sur $] -\infty, 2[\cup]2, +\infty[$, et la fonction $u \mapsto \ln(u)$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.
- On résout $u(x) > 0$ à l'aide d'un tableau de signe, on obtient : $u(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 2[$.
- f est donc dérivable sur $] -1; 2[$ et, pour tout x dans ce domaine $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Comme $u'(x) = \frac{(2-x) - (-1)(1+x)}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2}$, après simplification, $f'(x) = \frac{3}{(2-x)(1+x)}$.

Exercice 59.

Dérivée d'un produit et d'un quotient

Exercice 60.

Dérivées de fonctions composées types

Exercice 61.

Dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient

Exercice 62.

Calculs de dérivées avec logarithme

Exercice 63.

Calculs de dérivées avec exponentielle

Exercice 64.

Calculs de dérivées variés

Méthode.

Construire un tableau de variation

Pour construire le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur un intervalle.

- On présente l'expression de $f'(x)$ sous une forme commode pour étudier son signe suivant la valeur de x (forme factorisée le plus souvent).
- On établit les variations de la fonction à l'aide de cette étude de signe. On trace le tableau de variation.
- On complète ce tableau en indiquant les limites de la fonction aux bornes de son domaine de définition. Les résultats doivent être justifiés.

2.5.5 Calcul de limites

Méthode.

Calculer une limite

On utilise les limites classiques et les règles d'opérations données dans les tableaux ci-dessous. On étudiera tout particulièrement les cas où l'on rencontre une forme indéterminée.

Propriété 2.5.6.

Limites vues en terminale

1. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

2. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Propriété 2.5.7.

Somme de limites

On suppose que $\lim_a f = l$ et $\lim_a g = m$. Quand la somme des limites $l + m$ n'est pas indéterminée, la somme $(f + g)$ admet une limite en a , qui est $\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g$.

$\lim_a (f + g)$	$l = -\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$l = +\infty$
$m = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	<i>F.I.</i>
$m \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$m + l$	$+\infty$
$m = +\infty$	<i>F.I.</i>	$+\infty$	$+\infty$

Propriété 2.5.8.

Produit de limites

On suppose que $\lim_a f = l$ et $\lim_a g = m$. Quand le produit des limites $l \times m$ n'est pas indéterminé, la produit $(f \times g)$ admet une limite en a , qui est $\lim_a (f \times g) = (\lim_a f) \times (\lim_a g)$.

$\lim_a f \times g$	$l = -\infty$	$l \in]-\infty; 0[$	$l = 0$	$l \in]0; +\infty[$	$l = +\infty$
$m = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	<i>F.I.</i>	$-\infty$	$-\infty$
$m \in]-\infty; 0[$	$+\infty$	$m \times l$	$m \times l$	$m \times l$	$-\infty$
$m = 0$	<i>F.I.</i>	$m \times l$	$m \times l$	$m \times l$	<i>F.I.</i>
$m \in]0; +\infty[$	$-\infty$	$m \times l$	$m \times l$	$m \times l$	$+\infty$
$m = +\infty$	$-\infty$	$-\infty$	<i>F.I.</i>	$+\infty$	$+\infty$

Propriété 2.5.9.

Inverse de limite

On suppose que $\lim_a f = l$. Quand l'inverse de la limite $\frac{1}{l}$ n'est pas indéterminé, l'inverse $\frac{1}{f}$ admet une limite en a , qui est $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim_a f}$.

$\lim_a f$	$l = -\infty$	$l = 0^-$	$l = 0$	$l = 0^+$	$l = +\infty$	$l \in \mathbb{R}^*$
$\lim_a \frac{1}{f}$	0	$-\infty$	<i>F.I.</i>	$+\infty$	0	$\frac{1}{l}$

Illustration.

Calcul de limite

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$

On pose $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$.

- On remarque que le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 quand x tend vers 2. En effet, 2 est racine de ces deux polynômes. La limite est donc dans un premier temps indéterminée.

- Après calcul, on obtient la deuxième racine de $x^2 + 3x - 10$ qui est (-5) , on factorise le numérateur : $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$.

De même, la deuxième racine de $3x^2 - 5x - 2$ est $\left(-\frac{1}{3}\right)$, on factorise le dénominateur :

$$3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x - 2)(3x + 1).$$

- En simplifiant par $(x - 2)$, il vient $f(x) = \frac{x + 5}{3x + 1}$.

L'indétermination est levée, on peut conclure : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{7}{7} = 1$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$

Comme ci-dessus, on pose $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$.

En factorisant numérateur et dénominateur par x^2 puis en simplifiant, $f(x) = \frac{1 + 3\frac{1}{x} - 10\frac{1}{x^2}}{3 - 5\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x^2}}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on peut conclure $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{1}{3}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$

On pose : $f(x) = x - \ln x$.

- Quand x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, on a donc une indétermination.

- En factorisant par x , il vient $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$.

- Par produit, on peut conclure : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-2x}$

On pose : $f(x) = (x+1)e^{-2x}$.

- On sait que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$, il y a donc indétermination.

- On peut écrire $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) xe^{-2x}$.

– On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

– On pose $t = -2x$, quand x tend vers $+\infty$, t tend vers $-\infty$.

Comme $xe^{-2x} = -\frac{1}{2}te^t$ et que $\lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0$.

- Par produit, on conclut : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-2x} = 0$.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 1}{x + 1}$

- La fonction \sin n'a pas de limite en $+\infty$ mais, pour tout x réel, $|\sin x| \leq 1$,

donc $|\sin x + 1| \leq |\sin x| + 1 \leq 2$. On en déduit que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq \frac{2}{x+1}$.

- Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$, par comparaison, on peut conclure $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 1}{x + 1} = 0$.

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

On pose $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

- On a une indétermination pour la limite demandée car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$.

- On transforme $f(x)$ en utilisant l'expression conjuguée ce qui donne

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = +\infty$.

En passant à l'inverse : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$.

Exercice 65.

Limites de quotients de polynômes

Exercice 66.

Composition de limites

Exercice 67.

Limite d'un quotient

Exercice 68.

Identifier le terme prépondérant

2.5.6 Etude de fonction

Illustration.

Etude de fonction

On veut étudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x + 1)e^{-2x}$.

- Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} , pour tout réel x , $f'(x) = e^{-2x} + (x + 1)(-2)e^{-2x} = -(2x + 1)e^{-2x}$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$. f est donc croissante sur $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[$.

- Le maximum de f est $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$, en ce point la tangente à la courbe de f est parallèle au premier axe.

- Dans l'illustration précédente, nous avons prouvé que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Le premier axe est asymptote à la courbe de f pour x tendant vers $+\infty$.

- Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$, par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$(x + 1)e^{-2x}$	$-\infty$	$\frac{e}{2}$	0

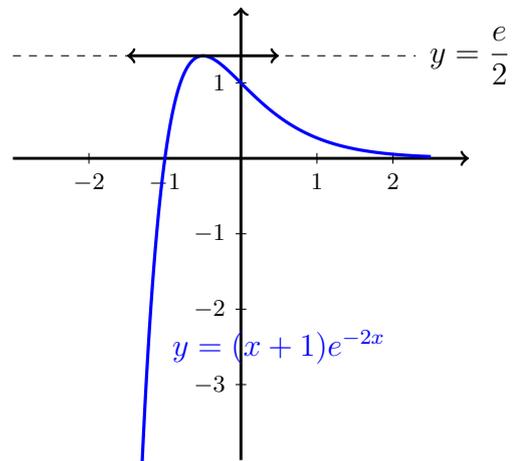


Illustration.

Savoir utiliser le tableau de variation d'une fonction pour déterminer un signe

On demande de démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x)$.

On introduit la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$.

- Pour $x \geq 0$, $x + 1 > 0$ donc f est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x + 1} - (1 - x) = \frac{x^2}{x + 1} \geq 0$. f est donc croissante sur $[0, +\infty[$.

- On remarque que $f(0) = 0$.

x	0	$+\infty$
$\ln(1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$	0	$+\infty$

On conclut, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ ce qui prouve $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x)$.

Exercice 69.

Etude de fonction

2.6 Fonctions usuelles

2.6.1 Fonctions puissances

Définition 2.6.1.

Puissances d'un réel x

1. Pour tout entier n supérieur à 1, $0^n = 0$.
2. Pour tout réel x non nul, on pose $x^0 = 1$ et, pour tout n entier naturel $x^{n+1} = x^n \times x$.
3. Pour tout réel x non nul, pour tout n entier naturel, on pose $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Propriété 2.6.1.

Parité, imparité

1. Si n est un entier pair, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^n = x^n$. La fonction $x \mapsto x^n$ est donc paire.
2. Si n est un entier impair, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^n = -x^n$. La fonction $x \mapsto x^n$ est donc impaire.

Propriété 2.6.2.

Limites

Soit n un entier.

1. si $n > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$,
2. si $n < 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = 0$.

Propriété 2.6.3.

Dérivée et variations

Pour tout entier n (positif ou négatif) la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur \mathbb{R}^* de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$. On en déduit les tableaux de variation sur $]0, +\infty[$.

Cas $n > 0$

x	0	1	$+\infty$
x^n	0	1	$+\infty$

Cas $n < 0$

x	0	1	$+\infty$
x^n	$+\infty$	1	0

Propriété 2.6.4.

Positions relatives

Pour tout n entier et $x \in]0, +\infty[$,
 $x^{n+1} - x^n = (x - 1)x^n$ est du signe de $(x - 1)$.
 On en déduit que :

1. si $x \in]0, 1[$, pour tout n entier, $x^{n+1} < x^n$,
2. si $x = 1$, pour tout n entier, $x^n = 1$,
3. si $x \in]1, +\infty[$, pour tout n entier, $x^n < x^{n+1}$.

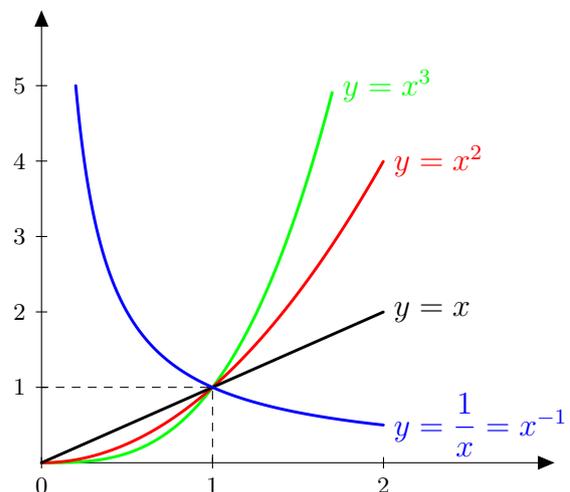


Illustration.

Suites d'intégrales

Pour n entier supérieur à 1, on pose $I_n = \int_0^1 x^n dx$, et pour n entier supérieur à 1, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

On veut calculer I_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. Puis on veut donner le sens de variation de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

1. On a $I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. On en déduit facilement $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2. • Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, $x^{n+1} \leq x^n$ et $1+x \geq 1$ donc $\frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}$.

Par croissance de l'intégrale, $J_{n+1} \leq J_n$. La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

• Pour tous les $n \in \mathbb{N}^*$ et les $x \in [0, 1]$, $0 \leq x^n$ et $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$, par produit,

il vient $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$.

On en déduit par croissance de l'intégrale, $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

• Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

2.6.2 Complément : les fonctions racines nièmes

Définition 2.6.2.

Les fonctions racines nièmes

On considère n entier supérieur à 1.

D'après la continuité et le tableau de variation de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$, pour tout $x \in [0, +\infty[$, il existe un unique $y \in [0, +\infty[$ tel que $y^n = x$.

Par définition, y est appelé la racine nième de x , on la note $y = \sqrt[n]{x}$ ou $y = x^{1/n}$.

Remarque 2.6.1.

Racine carrée

En particulier, pour $n = 2$, on définit ainsi la racine carrée de x notée $y = \sqrt{x}$ ou $y = x^{1/2}$.

Propriété 2.6.5.

Règles de calcul sur les exposants

Les règles usuelles sur les exposants sont ainsi prolongées car, pour tout $x \in [0, +\infty[$, pour tout n entier supérieur à 1 :

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \left(x^{1/n}\right)^n = x \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{x^n} = \left(x^n\right)^{1/n} = x$$

Illustration.

racines nièmes

$2^3 = 8$ donc $8^{1/3} = 2$; et $2^7 = 128$ donc $128^{1/7} = 2$.

Exercice 70.

Racines nièmes

Exercice 71.

Résolution d'une équation polynomiale

2.6.3 Fonction exponentielle

Définition 2.6.3. Définition de la fonction exponentielle népérienne

L'exponentielle népérienne est l'unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} qui vérifie :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1.$$

On la note \exp . L'image du réel x se note $\exp(x)$ ou e^x .

Propriété 2.6.6. Dérivabilité, signe et variation de la fonction \exp

1. Pour tout x réel, $\exp(x) > 0$.
2. La fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout x réel, $\exp'(x) = \exp(x)$.
3. La fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$	0	1	$+\infty$

4. (a) $\exp(0) = 1$,
 (b) pour tout réel x :
 $\exp(x) \leq 1$ si et seulement si $x \leq 0$, et $\exp(x) \geq 1$ si et seulement si $x \geq 0$.

Illustration.

Démontrer une inégalité avec \exp , par étude de fonction

On veut démontrer que, pour tout réel x , $1 + x \leq e^x$.

Pour comparer $1 + x$ et e^x , on propose d'étudier le signe de leur différence. On considère la fonction f définie par $f(x) = e^x - (1 + x)$ et on étudie les variations de f .

- Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} , pour tout x réel $f'(x) = e^x - 1$. Le signe de $f'(x)$ est celui de x . f est donc décroissante sur \mathbb{R}^- et croissante sur \mathbb{R}^+ .
- Elle admet un minimum en 0 égal à $f(0) = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - (1 + x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

On conclut : pour tout réel x , $f(x) \geq 0$ ce qui équivaut à $1 + x \leq e^x$.

Propriété 2.6.7.

Propriétés fondamentales de calcul

Pour tous réels x et y :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

Propriété 2.6.8.**Comportement en $+\infty$ et en $-\infty$**

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$$

2.

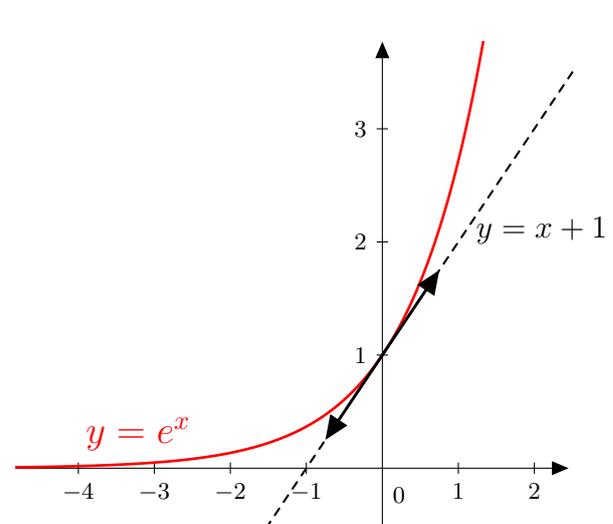
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x) = 0$$

Propriété 2.6.9.**Comportement en 0 et courbe représentative**

Comme $\exp'(0) = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

la courbe de la fonction exponentielle admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = x + 1$.

**Propriété 2.6.10.****Composée d'une fonction u dérivable par la fonction \exp**

Si u est dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} , alors la fonction $x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I , de dérivée $x \mapsto u'(x) \exp(u(x))$.

Illustration.

Tableau de variation et courbe d'une fonction

On doit construire le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ en indiquant les limites aux bornes du domaine de définition, tracer la courbe représentative de cette fonction et sa tangente en 0.

Pour tout x réel, $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -f(x)$. La fonction f est impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout x réel,

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) = 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Comme f est impaire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

$f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$ donc la tangente à la courbe de f en 0 est la droite d'équation $y = x$.

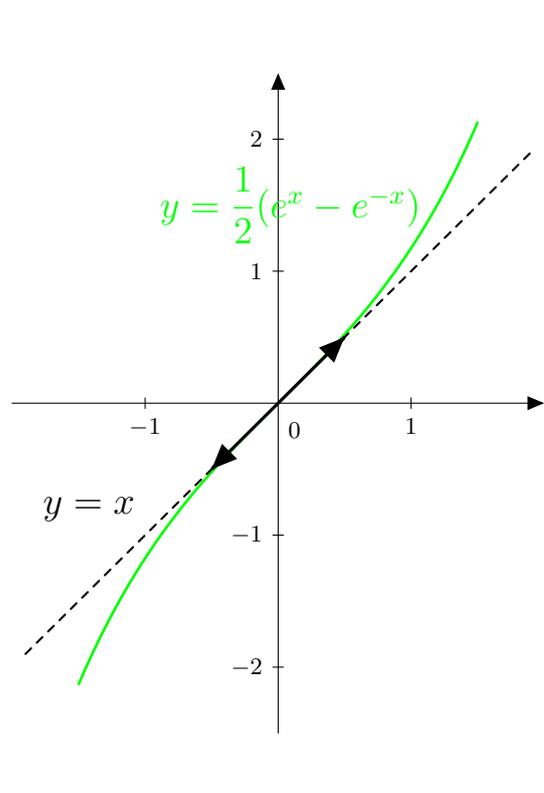


Illustration.

Tableau de variation et courbe d'une fonction

On doit construire le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ en indiquant les limites aux bornes du domaine de définition, et tracer la courbe représentative de cette fonction.

f est définie sur \mathbb{R}^* elle est dérivable sur ce domaine et, pour tout x non nul, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) < 0$. f est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$, on a

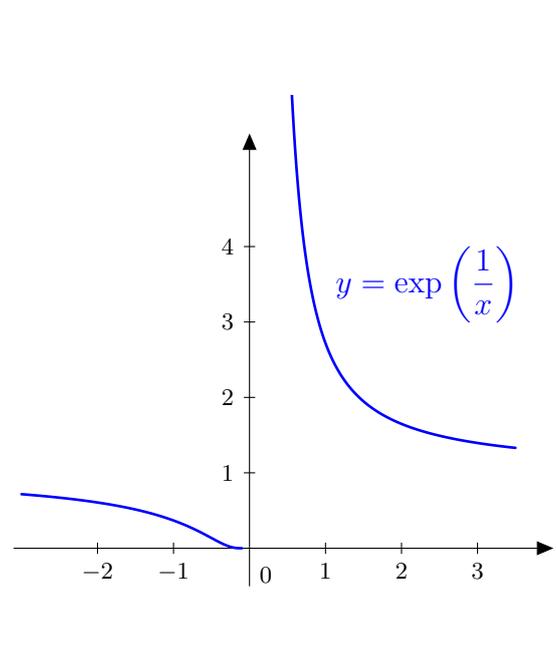
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Ainsi, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale de la courbe de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ Ainsi, la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de la courbe de f en 0^+ .



Exercice 72.**Etude de fonction avec exponentielle****Exercice 73.****Etude de fonction avec exponentielle****2.6.4 Fonction logarithme****Définition 2.6.4.****La fonction logarithme**

Pour tout x réel strictement positif, on note $\ln(x)$ l'unique réel y tel que $\exp(y) = x$.

Propriété 2.6.11.**Exponentielle et logarithme**

1. Pour tout x réel strictement positif et tout réel y :

$$y = \ln(x) \iff \exp(y) = x.$$

2. (a) Pour tout x réel strictement positif, $\exp(\ln(x)) = x$.

(b) Pour tout y réel, $\ln(\exp(y)) = y$.

*Illustration.***Simplifier une expression avec exp et ln**

On cherche à simplifier : $f(x) = xe^{\ln(x^2)/2}$.

Pour tout x réel non nul, $\ln(x^2) = 2 \ln(|x|)$ donc $f(x) = xe^{\ln(|x|)}$. On en déduit $f(x) = x|x|$.

Propriété 2.6.12.**Dérivée, variation et signe de la fonction logarithme**

1. La fonction \ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout x strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2. La fonction \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3. (a) $\ln(1) = 0$,

(b) pour tout réel x strictement positif :

$\ln(x) \leq 0$ si et seulement si $x \leq 1$, et $\ln(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 1$.

Propriété 2.6.13.**Propriétés fondamentales de calcul**

Pour tous réels strictement positifs a et b :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a)$$

Propriété 2.6.14.

Comportement en 0^+ et en $+\infty$

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

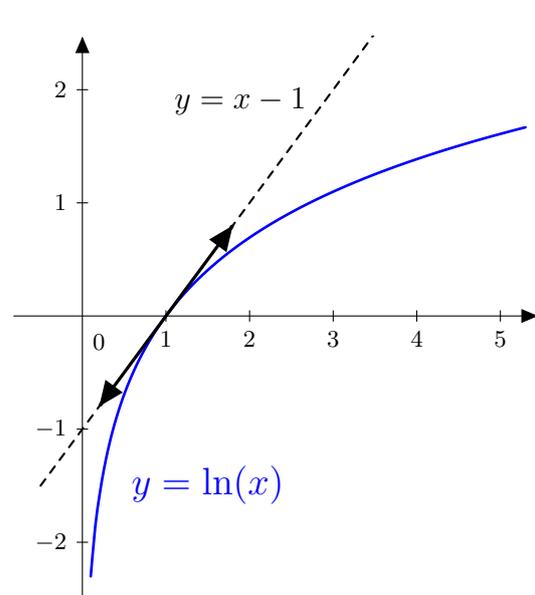
Propriété 2.6.15.

Comportement en 1 et courbe représentative

Comme $\ln'(1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

ce qui équivaut à $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$,

la courbe de la fonction logarithme népérien admet au point d'abscisse 1 une tangente d'équation $y = x - 1$.



Propriété 2.6.16.

Composée d'une fonction u dérivable strictement positive par la fonction \ln

Si u est dérivable strictement positive sur un intervalle I de \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Illustration.

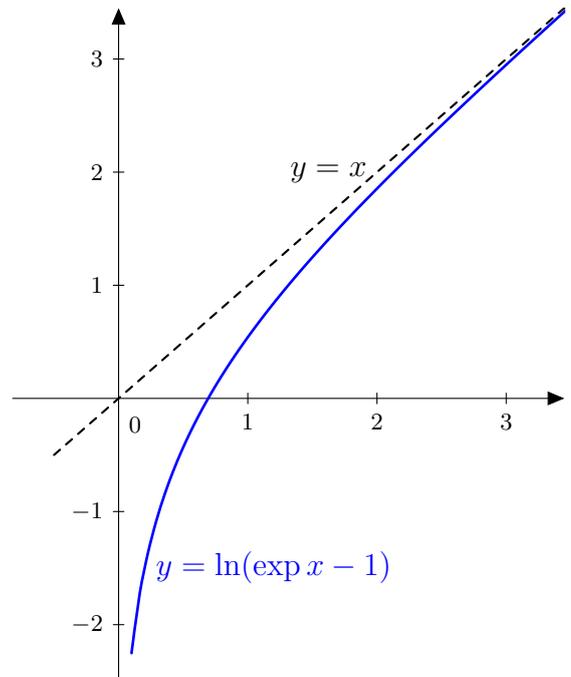
Tableau de variation et courbe d'une fonction, asymptote

On veut construire le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^x - 1)$ en indiquant les limites aux bornes du domaine de définition, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$, et tracer la courbe représentative de cette fonction en précisant une droite asymptote.

- $f(x)$ existe si et seulement si $e^x > 1$ ce qui équivaut à $x > 0$.
- f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} > 0$.
 f est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.
Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- De plus, $f(x) = \ln\left(e^x \left[1 - \frac{1}{e^x}\right]\right) = \ln(e^x) + \ln(1 - e^{-x}) = x + \ln(1 - e^{-x})$ ainsi $f(x) - x = \ln(1 - e^{-x})$.
Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f lorsque x tend vers $+\infty$.

x	0	$+\infty$
$\ln(e^x - 1)$	$-\infty$	$+\infty$



Exercice 74.

Étude de fonction avec logarithme

Exercice 75.

Étude de fonction avec logarithme

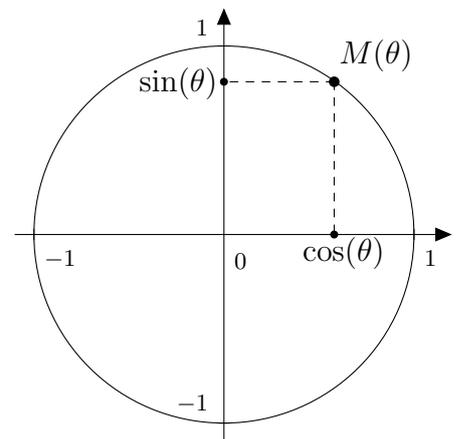
Exercice 76.

Étude de fonction avec logarithme

2.6.5 Fonctions trigonométriques

Propriété 2.6.17. Cercle trigonométrique, valeurs particulières, relation fondamentale

1. On peut utiliser le cercle trigonométrique pour représenter un angle de mesure θ modulo 2π et placer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sur les axes :



2. Les valeurs usuelles des fonctions cos et sin, à connaître sont :

$$\cos 0 = 1, \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin 0 = 0, \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

3. Relation fondamentale : Pour tout x réel, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Illustration.**Valeurs particulières, résolution d'une équation trigonométrique**

Déterminer tous les réels x compris entre 0 et π tels que $\sin(3x) = 0$.

- On remarque que les points d'intersection du cercle trigonométrique et du premier axe du repère correspondent aux angles de mesure égale à $0 [2\pi]$ ou à $\pi [2\pi]$. Ces mesures s'écrivent $k\pi$ avec k entier arbitraire.
- On en déduit que $\sin(3x) = 0$ équivaut à $3x = k\pi$ avec k entier arbitraire soit encore $x = k\frac{\pi}{3}$
- Pour que x soit compris entre 0 et π , il faut que k soit égal à 0 ou 1 ou 2 ou 3.
- Les solutions sont donc : $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$.

Illustration.**Résolution d'une équation trigonométrique**

On cherche les solutions de $\cos(\theta) \geq 0$ appartenant à $[-\pi; \pi]$.

D'après la définition de $\cos(\theta)$ à l'aide du cercle trigonométrique, celui-ci est positif pour les points $M(\theta)$ du demi-cercle à droite de l'axe des ordonnées. Les valeurs de θ correspondantes et entre $-\pi$ et π sont celles comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Propriété 2.6.18.**Propriétés des fonctions cosinus et sinus**

1. Les fonctions \cos et \sin sont périodiques de période 2π ce qui équivaut à :

$$\text{Pour tout } x \text{ réel, } \cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

2. La fonction \cos est paire et la fonction \sin est impaire ce qui équivaut à :

$$\text{Pour tout } x \text{ réel, } \cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x.$$

3. Les deux fonctions sont dérivables sur \mathbb{R} .

$$\text{Pour tout } x \text{ réel, } \cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \sin'(x) = \cos(x).$$

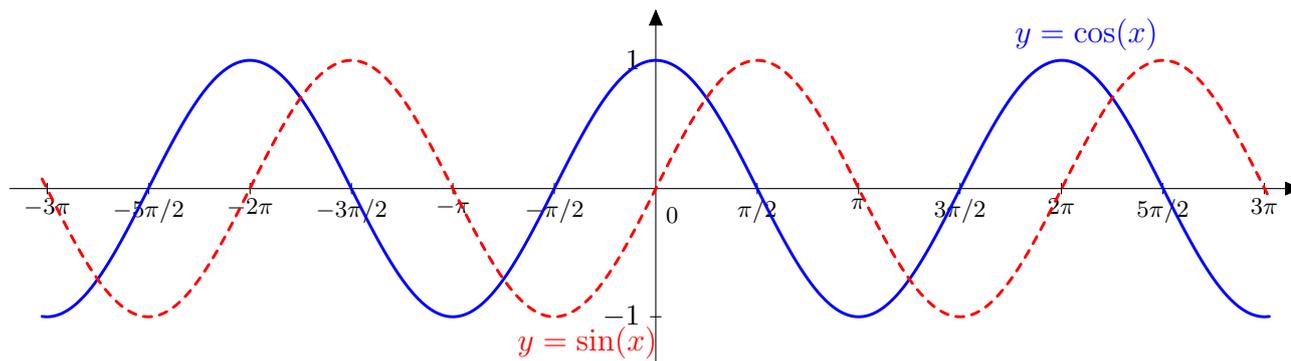
Propriété 2.6.19.**Courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus**

Illustration.**Périodicité, parité et imparité**

On pose, pour tout réel x , $f(x) = \sin^2(x) \sin(2x)$.

Démontrer que la fonction f est périodique et impaire. Interpréter géométriquement pour la courbe représentative de cette fonction.

- D'après la formule d'addition du sinus, pour tout x réel,

$$\sin(x + \pi) = \sin(x) \cos \pi + \cos(x) \sin \pi = -\sin x$$

On remarquera que les points du cercle trigonométrique représentant x et $x + \pi$ sont symétriques par rapport à l'origine.

Comme la fonction sinus est de période 2π , pour tout x réel,

$$\sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$$

On en déduit, pour tout x réel, $f(x + \pi) = f(x)$, ce qui prouve que π est une période de f .

On retiendra que, pour démontrer qu'un réel T est période de f , on prouve que :

pour tout réel x , $f(x + T) = f(x)$.

- Comme la fonction sinus est impaire, pour tout x réel,

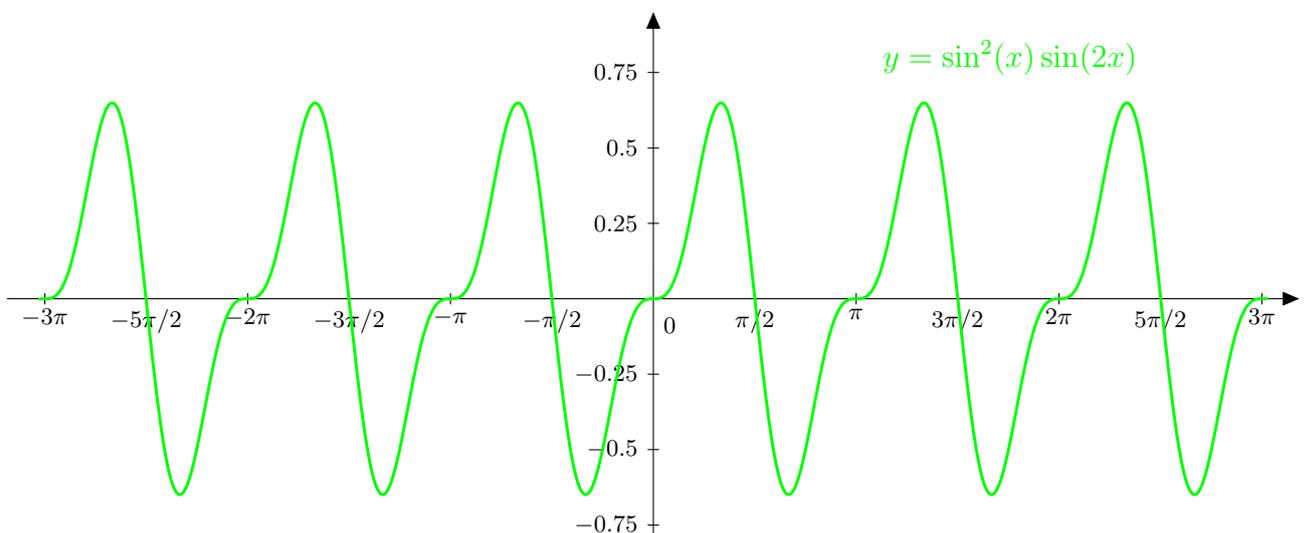
$$f(-x) = \sin^2(-x) \sin(-2x) = (-\sin x)^2 \times (-\sin(2x)) = -f(x)$$

ce qui prouve que f est impaire.

On retiendra que, pour démontrer que la fonction f est impaire, on prouve que :

pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$.

- D'après la période de f , il suffit de tracer sa courbe sur un intervalle de longueur π puis d'appliquer des translations pour la compléter. D'après l'imparité de f , cette courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Allure de cette courbe sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$:



Propriété 2.6.20.**Formules de trigonométrie**

1. *Formules d'addition :*

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

2. *Formules de duplication :*

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Illustration.

Périodicité, formule de trigonométrie et valeurs particulières

Donner les valeurs exactes de $\cos\left(31\frac{\pi}{4}\right)$, de $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ et de $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

1. Comme la fonction cosinus est de période 2π et que $31 = 32 - 1 = 8 \times 4 - 1$,

$$\cos\left(31\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(8\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

De plus la fonction cosinus est paire, finalement $\cos\left(31\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. D'après la formule d'addition du cosinus :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos \pi - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin \pi$$

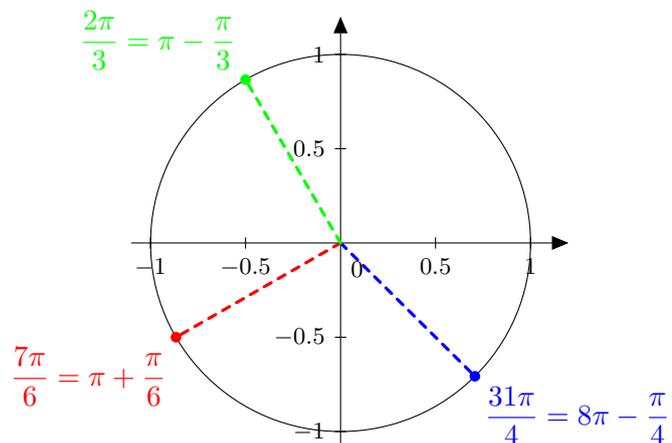
Comme $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$, $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Comme $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, d'après la formule d'addition du sinus :

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin(\pi) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(-\pi) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Comme $\cos(-\pi) = \cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Il est bien utile de s'aider de la représentation sur le cercle trigonométrique.



Propriété 2.6.21.**Limites à connaître**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*Illustration.***Limite d'une fonction trigonométrique**

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

On pose, pour x réel non nul, $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$. On a $f(x) = 2 \frac{\sin(2x)}{2x}$.

On propose le changement de variable $u = 2x$. Comme u tend vers 0 avec x , $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

Finalement : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$.

Exercice 77.**Valeurs exactes****Exercice 78.****Relation fondamentale****Exercice 79.****Périodicité****Exercice 80.****Equations et inéquations trigonométriques****Exercice 81.****Une étude de signe****Exercice 82.****Une équation du second degré****Exercice 83.****Formules d'addition****Exercice 84.****Fonctions sinusoïdales****Exercice 85.****Périodicité****Exercice 86.****Limites**

2.7 Intégration

2.7.1 Primitives d'une fonction sur un intervalle

*Remarque 2.7.1.***Notations**

Dans toute cette sous-section, f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point).

Définition 2.7.1.**Primitive d'une fonction sur un intervalle**

On appelle primitive de f sur I toute fonction dérivable sur I , et dont la dérivée sur I est la fonction f .

Illustration.

Primitive d'une fonction sur un intervalle

La fonction g définie par $g(x) = x^3 - 5x^2 + 3$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 10$ sur $I = \mathbb{R}$ car g est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, $g'(x) = f(x)$.

On remarque que la fonction $h(x) = x^3 - 5x^2$ est aussi une primitive de f sur \mathbb{R} .

Propriété 2.7.1.

Tableaux des dérivées et primitives usuelles

fonction	dérivée	intervalle
$k, k \in \mathbb{R}$	0	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{Z}, n \leq -1$	nx^{n-1}	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_+^*
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}_+^*
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$\cos(x)$	\mathbb{R}

fonction	primitive	intervalle
$k, k \in \mathbb{R}$	kx	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	\mathbb{R}_+^*
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	\mathbb{R}_+^*
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbb{R}

Le tableau de droite fournit une seule primitive, on obtient les autres en ajoutant une constante (voir la propriété sur l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle plus bas).

Propriété 2.7.2.

Dérivées et primitives de fonctions - types

Les tableaux suivants permettent de déterminer des primitives plus complexes. Dans les deux tableaux ci-dessous, u désigne une fonction dérivable sur I .

Tableau de la dérivée de fonctions - types

fonction	dérivée	Intervalle I
$u^n, n \in \mathbb{N}$	$nu^{n-1}u'$	u dérivable sur I
$u^n, n \in \mathbb{Z}, n \leq -1$	$nu^{n-1}u'$	sur tout intervalle I où u ne s'annule pas.
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	sur tout intervalle I où u ne s'annule pas.
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	sur tout intervalle I où u est strictement positive
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	sur tout intervalle I où u est strictement positive
e^u	$e^u u'$	u dérivable sur I
$x \mapsto u(ax + b), a, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto au'(ax + b)$	u dérivable sur J telle que : $\forall x \in J, ax + b \in I$

Tableau des primitives de fonctions – types

<i>fonction</i>	<i>primitive</i>	<i>Intervalle I</i>
$u^n u', n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	u dérivable sur I
$u^n u', n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	sur tout intervalle I où u ne s'annule pas.
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	sur tout intervalle I où u est strictement positive
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	sur tout intervalle I où u est strictement positive
$e^u u'$	e^u	u dérivable sur I
$x \mapsto u'(ax + b), a \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{a} u(ax + b)$	u dérivable sur J telle que : $\forall x \in J, ax + b \in I$

Remarque 2.7.2.

Puissances négatives de la variable

En cas de difficultés pour calculer la dérivée (ou pour déterminer une primitive) d'une fonction de la forme $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (pour une valeur fixée de $n \in \mathbb{N}^*$), on pourra commencer par écrire $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, et appliquer les formules usuelles de dérivation :

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = (-n) \times x^{-n-1} = -n x^{-(n+1)} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

Propriété 2.7.3.

Combinaison linéaire de primitives

On suppose que f et g sont deux fonctions définies sur I et que α et β sont deux réels.

Si F est une primitive de f et G une primitive de g sur I , alors $H = \alpha F + \beta G$ est une primitive de $h = \alpha f + \beta g$ sur I .

Illustration.

Combinaison linéaire de primitives

- $F : x \mapsto 4x^2$ est une primitive de $f : x \mapsto 8x$
et $G : x \mapsto -\cos(x)$ est une primitive de $g : x \mapsto \sin(x)$ sur \mathbb{R} .

- Soit h définie par $h(x) = \frac{8}{5}x - 3\sin(x) = \frac{1}{5}f(x) - 3g(x)$.

Elle admet pour primitives sur \mathbb{R} toutes les fonctions F de la forme

$$H(x) = \frac{1}{5}F(x) - 3G(x) + k = \frac{4}{5}x^2 - 3(-\cos(x)) + k = \frac{4}{5}x^2 + 3\cos(x) + k$$

où k est une constante réelle.

Propriété 2.7.4. Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur I .

1. (a) Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction f sur I , alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in I$, $F_1(x) = F_2(x) + C$.
 (b) Réciproquement : si F_1 est une primitive de f sur I et si C est une constante réelle, alors la fonction F_2 définie par $F_2(x) = F_1(x) + C$ est une primitive de f sur I .
2. (a) Si $a \in I$ et si $y \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(a) = y$.
 (b) Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction f sur I , et s'il existe $a \in I$ tel que $F_1(a) = F_2(a)$, alors F_1 et F_2 sont égales, c'est à dire que pour tout $x \in I$, $F_1(x) = F_2(x)$.

Exercice 87.

Calculs de primitives

Exercice 88.

Calcul de primitives

2.7.2 Intégrale d'une fonction continue sur $[a; b]$

Remarque 2.7.3.

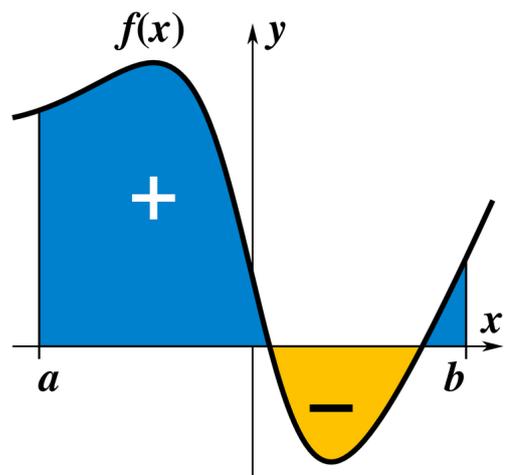
Notations

Dans toute cette sous-section, f est une fonction à valeurs réelles continue sur $[a; b]$ (avec $a < b$).

Définition 2.7.2.

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ correspond à l'aire de la portion du plan comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses, délimitée par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, les portions de plan où f est négative étant comptées négativement.

Définition géométrique de l'intégrale



Remarque 2.7.4.

Intégrale d'une fonction constante sur $[a; b]$

Soient $C \in \mathbb{R}$ et f une fonction constante sur $[a; b]$, telle que pour tout $t \in [a; b]$, $f(t) = C$.

Alors la courbe de f sur $[a; b]$ est un segment de droite horizontal, et la portion de plan comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses est un rectangle, d'aire $\mathcal{A} = (b - a) \times C$. Autrement dit,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b C dt = (b - a) \times C.$$

Propriété 2.7.5.

Linéarité de l'intégrale

Si f et g sont continues sur $[a; b]$ et α, β sont des réels, alors

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Propriété 2.7.6.**Croissance de l'intégrale**

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles continues sur $[a; b]$.

Si, pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Illustration.

Linéarité, majoration d'une intégrale

On note $A = \int_1^3 \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt$.

D'une part, $A = \int_1^3 1dt + \int_1^3 \frac{1}{1+t^2}dt = (3-1) \times 1 + \int_1^3 \frac{1}{1+t^2}dt = 2 + \int_1^3 \frac{1}{1+t^2}dt$.

D'autre part, pour tout $t \in [1; 3]$, $1+t^2 \geq 1+1^2 = 2 > 0$, et $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

Donc $\int_1^3 \frac{1}{1+t^2}dt \leq \int_1^3 \frac{1}{2}dt = (3-1) \times \frac{1}{2} = 1$. On en déduit que $A \leq 2 + 1 = 3$.

2.7.3 Théorème fondamental et calcul d'intégrales

Remarque 2.7.5.

Notations

Dans toute cette sous-section, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

Propriété 2.7.7.**Théorème fondamental de l'analyse**

Soient f continue sur I , et a un point de I .

On considère la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

1. F est une primitive de f sur I . Autrement dit, F est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

2. F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

En particulier, toute fonction f continue sur I admet² des primitives sur I .

Propriété 2.7.8.**Méthode standard de calcul d'une intégrale**

Soient f continue sur I , et a et b deux éléments de I .

Si F est une primitive de f sur I , alors

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Illustration.

Méthode standard de calcul d'une intégrale

Soit F la fonction définie par $F(t) = \frac{t^4}{4} - t^2 + e^t$. Cette fonction est dérivable sur $I = \mathbb{R}$, et $F'(t) = t^3 - 2t + e^t$.

On en déduit que

$$\int_0^1 (t^3 - 2t + e^t)dt = \left[F(t)\right]_0^1 = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{4} - 1 + e\right) - (0 - 0 + 1) = -\frac{7}{4} + e.$$

2. Même si on ne peut pas toujours les calculer explicitement.

Méthode.**Calcul d'une intégrale**

Le calcul d'intégrales s'appuie sur trois axes principaux.

1. On utilise le tableau des primitives des fonctions usuelles pour calculer les intégrales "simples".
2. On cherche à reconnaître dans la fonction intégrée une dérivée de fonction-type, en posant éventuellement $u(x) = \dots$
3. Quand la fonction f intégrée est une somme de fonctions, on décompose l'intégrale en somme d'intégrales plus simples.

Illustration.**Calcul d'intégrales sans dérivées de fonctions-type**

1. Calcul de $I_1 = \int_1^2 \frac{t+4}{t^2} dt$.

On décompose $\frac{t+4}{t^2}$ sous la forme : $\frac{t+4}{t^2} = \frac{1}{t} + \frac{4}{t^2}$, puis on calcule :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt + 4 \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[\ln(t) \right]_1^2 + 4 \left[\frac{-1}{t} \right]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) + 4 \left(\frac{-1}{2} - (-1) \right) = 2 + \ln(2)$$

2. Calcul de $I_2 = \int_{1/4}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^4} \right) dx$.

On reconnaît une somme de fonctions. Pour déterminer plus facilement une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^4}$, on remarque que $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$, et que $(x^{-3})' = -3x^{-4}$. On calcule ensuite :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{1/4}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx - 2 \int_{1/4}^1 \frac{1}{x^4} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_{1/4}^1 - 2 \left[\frac{x^{-3}}{-3} \right]_{1/4}^1 \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) - 2 \left(\frac{-1}{3} + \frac{4^3}{3} \right) = -41. \end{aligned}$$

Illustration.**Calcul d'intégrales avec dérivées de fonctions-type**

1. Calcul de $A_1 = \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1} dx$

On remarque que $x \mapsto 3x^2$ est la dérivée de $x \mapsto x^3 + 1$. La fonction à intégrer est donc de la forme $\frac{u'}{u}$, si on pose $u(x) = x^3 + 1$. Donc : $A_1 = \left[\ln(x^3 + 1) \right]_0^1 = \ln(2)$.

2. Calcul de $A_2 = \int_{-1}^2 (2x+1)^4 dx$

On remarque que, si on pose $u(x) = 2x+1$, la fonction à intégrer $x \mapsto (2x+1)^4$ n'est pas exactement $u'(x)u^4(x)$, mais comme $u'(x) = 2$, on peut transformer A_2 sous la forme :

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 2 \times (2x+1)^4 dx.$$

$$\text{On obtient } A_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} (2x+1)^5 \right]_{-1}^2 = \frac{1}{10} (5^5 - (-1)^5) = \frac{3126}{10}.$$

On pouvait trouver cette valeur en utilisant la dernière ligne du dernier tableau, en posant $u'(t) = t^4$, $a = 2$, $b = 1$, sachant qu'on peut prendre $u(t) = \frac{1}{5}t^5$.

3. Calcul de $A_3 = \int_0^2 (t-1)e^{-t^2+2t} dt$.

On remarque que la dérivée de $t \mapsto -t^2 + 2t$ est égale à $t \mapsto -2t + 2 = -2(t-1)$.

A condition de transformer l'écriture de A_3 en $\frac{-1}{2} \int_0^2 -2(t-1)e^{-t^2+2t} dt$, on voit que la fonction à intégrer est de la forme $u'(t)e^{u(t)}$, en posant $u(t) = -t^2 + 2t$.

Finalement : $A_3 = -\frac{1}{2} \left[e^{-t^2+2t} \right]_0^2 = 0$.

Exercice 89.

Encadrer une intégrale

Exercice 90.

Primitives et calculs d'intégrales

Exercice 91.

Primitives de fonctions-type et calculs d'intégrales

Exercice 92.

Dérivées et primitives de puissances de la variable

Exercice 93.

Primitives de fonctions-type et calculs d'intégrales

Exercice 94.

Calculs de primitives et intégrales

2.7.4 Intégration par parties

Propriété 2.7.9.

Formule d'intégration par parties

Soient a et b deux réels, tels que $a < b$.

Si u et w sont deux fonctions réelles, définies et de classe C^1 sur le segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u'(t) w(t) dt = \left[u(t)w(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)w'(t) dt,$$

où $\left[u(t)w(t) \right]_a^b = u(b)w(b) - u(a)w(a)$.

Méthode.

Calcul d'une intégrale à l'aide d'une IPP

Pour utiliser une IPP, pour calculer une intégrale de la forme $I = \int_a^b f(t) dt$.

1. Commencer par identifier un produit dans l'intégrale à calculer.
2. Puis choisir lequel des 2 facteurs sera intégré et lequel sera dérivé, et calculer une primitive du facteur à intégrer.
A ce stade, on a à l'esprit ou sur son brouillon : deux fonctions u, w telles que, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = u'(t)w(t)$.
3. Définir proprement les 2 fonctions u et w choisies, justifier qu'elles sont de classe C^1 sur $[a, b]$, écrire une expression de la dérivée de chacune.
4. Utiliser la formule d'IPP pour avoir une nouvelle expression de l'intégrale à calculer.
5. Evaluer le crochet, et calculer la nouvelle intégrale donnée par l'IPP, pour finir le travail.

Illustration.

Utilisation d'une IPP pour calculer une intégrale

On peut calculer $A = \int_0^\pi te^t dt$ par IPP.

La fonction $w : t \mapsto t$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, de dérivée $w'(t) = 1$ sur ce segment. La fonction $u : t \mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$, de dérivée $u'(t) = e^t$ sur ce segment.

La formule d'IPP donne :

$$A = \int_0^1 u'(t) w(t) dt = \left[u(t)w(t) \right]_0^1 - \int_0^1 u(t)w'(t) dt = \left[te^t \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^t dt.$$

Comme $\int_0^1 e^t dt = \left[e^t \right]_0^1 = e - 1$, on obtient $A = (e - 0) - (e - 1) = 1$.

Exercice 95.

Calculs d'intégrales par IPP

Exercice 96.

Calculs d'intégrales par IPP

Exercice 97.

Calculs d'intégrales par IPP

Exercice 98.

Calculs de primitives par IPP

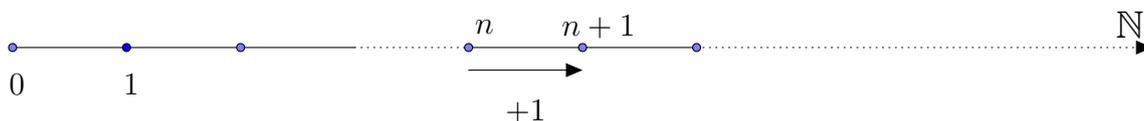
2.8 Raisonnement par récurrence et suites numériques

2.8.1 Démontrer par récurrence

Définition 2.8.1.

L'ensemble des entiers positifs ou nuls, qu'on note \mathbb{N} , est construit par récurrence :

- L'ensemble \mathbb{N}
- $0 \in \mathbb{N}$
 - et si $n \in \mathbb{N}$ alors $(n + 1) \in \mathbb{N}$.



On note \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers strictement positifs.

Théorème 2.8.1.

Preuve par récurrence simple

On considère une propriété $P(n)$ qui dépend d'un nombre entier n .

Si $P(n_0)$ est vraie, et si, pour tout $k \geq n_0$, $P(k)$ implique $P(k + 1)$,

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

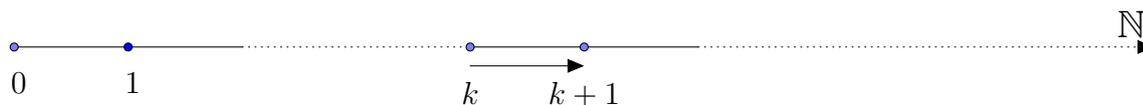
Illustration.

Preuve par récurrence simple

- Initialisation : $P(n_0)$ est vraie.



- Hérité : $\forall k \geq n_0, P(k) \implies P(k + 1)$.



- Conclusion : $\forall n \geq n_0, P(n)$ est vraie.

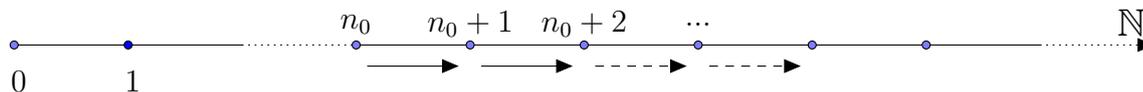


Illustration.**Démontrer des inégalités par récurrence**

Soit x un réel strictement positif. On veut montrer que pour tout $n \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

- Initialisation : Considérons $n = 0$.

On a $(1+x)^0 = 1$ et $1+0 \times x = 1$.

Donc $(1+x)^n \geq 1+nx$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité : On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(1+x)^k \geq 1+kx$.

Comme $1+x \geq 1$, on en déduit que $(1+x)^k \times (1+x) \geq (1+kx) \times (1+x)$.

De plus, $(1+kx)(1+x) = 1+x+kx+kx^2 \geq 1+(k+1)x$.

Donc $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$.

Autrement dit, la propriété est vraie au rang $(k+1)$.

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

Illustration.**Démontrer des relations par récurrence**

On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.

- Initialisation : Pour $n = 0$.

On a $u_0 = 2^{0+4} + 3^{3 \times 0 + 2} = 2^4 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5 \times 5$.

Donc la propriété est vraie au rang 0.

- Hérédité : On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que $u_k = 2^{k+4} + 3^{3k+2}$ est divisible par 5.

Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = 2^{k+4} + 3^{3k+2} = 5 \times p$.

Par ailleurs, $u_{k+1} = 2^{(k+1)+4} + 3^{3(k+1)+2} = 2^{k+5} + 3^{3k+5} = 2 \times 2^{k+4} + 27 \times 3^{3k+2}$.

On en déduit que

$$u_{k+1} = 2 \times (2^{k+4} + 3^{3k+2}) + 25 \times 3^{3k+2} = 2u_k + 5 \times 5 \times 3^{3k+2} = 5 \times [2p + 5 \times 3^{3k+2}]$$

et que u_{k+1} est divisible par 5.

Autrement dit, la propriété est vraie au rang $(k+1)$.

- Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 99.

Prouver des relations par récurrence

Exercice 100.

Prouver des inégalités par récurrence

Exercice 101.

Prouver des relations par récurrence

2.8.2 Généralités

Définition 2.8.2.

Suite numérique

Formellement, une suite u est une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un sous ensemble³ de \mathbb{N} de la forme $\llbracket n_0; +\infty \llbracket$.

On la note $(u_n)_{n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket}$ ou bien $(u_n)_{n \geq n_0}$ et on dit que u_n est le terme général de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Concrètement, on peut définir une suite de deux façons principales.

- On peut définir une suite explicitement, comme une fonction, à l'aide d'une formule.

On dira que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de terme général $u_n = 5n^2 - 7n + 3$ pour dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5n^2 - 7n + 3$. Dans ce cas, on aura $u_1 = 5 \times 1^2 - 7 \times 1 + 3 = 1$ et $u_{10} = 500 - 70 + 3 = 433$ par exemple.

- On peut définir une suite par récurrence, à l'aide de son premier terme et de relations vérifiées par les termes suivants.

On dira par exemple que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 3 \end{cases}$ pour dire que $u_0 = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 3$. Dans ce cas, on aura $u_1 = u_0^2 - 3 = -2$, et $u_2 = u_1^2 - 3 = 1$, etc.

Le fait que les relations de récurrence définissent bien tous les termes une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ peut ne pas être évident.

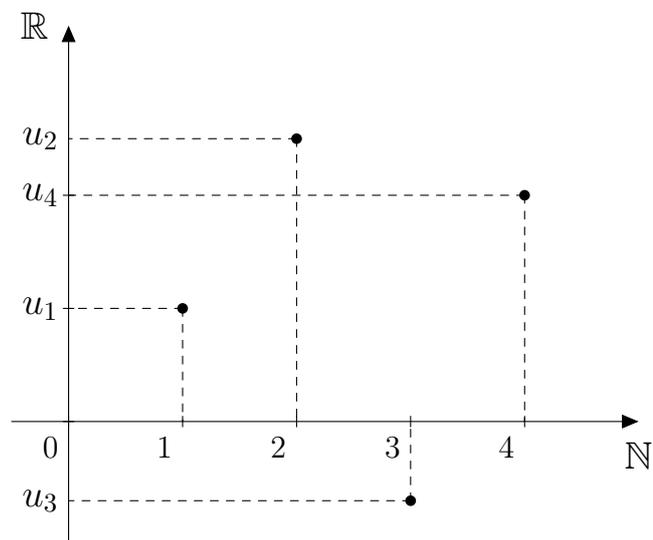
Illustration.

On peut représenter une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Le graphe de (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$.

Comme celles d'une fonction, les différentes propriétés d'une suite (croissance, encadrements, etc) peuvent être traduites graphiquement.

Représentation graphique d'une suite réelle



3. $\llbracket n_0; +\infty \llbracket$ signifie $\mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$.

Illustration.**Définition d'une suite par récurrence**

1. Considérons le système
$$\begin{cases} u_0 = -4/3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2} \end{cases}.$$

Le calcul donne
$$u_1 = \frac{-4}{2 - \frac{4}{3}} = \frac{-4}{\frac{2}{3}} = \frac{-4}{3} \times \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{-4}{3} \times \frac{3}{2} = -2.$$

Comme $u_1 = -2$, la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}$ ne définit pas le terme u_2 .

Donc le système
$$\begin{cases} u_0 = -4/3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2} \end{cases}$$
 ne permet pas de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Considérons le système
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2} \end{cases}.$$

On sait que si $x > 0$, alors $\frac{x}{x+2} > 0$. Comme $u_0 = 1 > 0$, on montre aisément par récurrence que pour tout $n \geq 0$, le terme u_n vérifie $u_n > 0$, et le terme u_{n+1} est bien défini.

On en déduit que le système
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2} \end{cases}$$
 définit bien une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Méthode.**Etude d'une suite définie par récurrence**

Quand une suite est définie par récurrence, il est fréquent⁴ que ses propriétés s'établissent à l'aide de démonstrations faites par récurrence.

Définition 2.8.3.**Suite réelle majorée, minorée, bornée**

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

1. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée par M si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M$.
2. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée par m si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq m$.
3. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée s'il existe m et M réels tels que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à la fois majorée par M et minorée par m .

Illustration.**Minorer le terme général d'une suite**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{cases}.$$
 On veut montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est minorée par -5 .

- On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2 \geq -2$ car $u_n \in \mathbb{R}$ et $u_n^2 \geq 0$. Ainsi, $u_n \geq -2$ et $u_n \geq -5$ pour tout $n \geq 1$.
- Par ailleurs, on a $u_0 = -4 \geq -5$.

On en déduit que $u_n \geq -5$ pour tout $n \geq 0$, c'est à dire que $(u_n)_{n \geq 0}$ est minorée par -5 .

On peut aussi faire des démonstrations de majorations et/ou minorations par récurrence (voir plus bas).

4. Mais ce n'est pas toujours le cas.

Exercice 102.**Suites majorées, minorées, bornées****Exercice 103.****Encadrer les termes d'une suite****Exercice 104.****Encadrer les termes d'une suite**Illustration.**Prouver des encadrements par récurrence**

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$.

On veut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est bien défini et $-1 \leq u_n \leq 2$.

- Initialisation : Pour $n = 0$.

On a $u_0 = -1$ est bien défini, et $-1 \leq u_0 \leq 2$ est vrai.

Donc la propriété est vraie au rang 0.

- Hérédité : On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que u_k est bien défini et $-1 \leq u_k \leq 2$.

On en déduit d'abord que $2 + u_k \geq 0$ et que $u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k}$ est bien défini.

De plus,

$$\begin{aligned} -1 &\leq u_k \leq 2 \\ 1 &\leq u_k + 2 \leq 4 \\ \sqrt{1} &\leq \sqrt{u_k + 2} \leq \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

montre que $1 \leq u_{k+1} \leq 2$, et donc que $-1 \leq u_{k+1} \leq 2$.

Autrement dit, la propriété est vraie au rang $k + 1$.

- Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 105.**Encadrements et récurrence****Exercice 106.****Encadrements et récurrence****Définition 2.8.4.****Variations, monotonie d'une suite**

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

1. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
2. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
3. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est monotone si elle est croissante ou si elle est décroissante.

Illustration.**Variations, monotonie d'une suite**

Montrons que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$ est croissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout x réel, $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$.

On en déduit que $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 \geq 0$.

- On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ c'est à dire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

Dans certains cas, la monotonie d'une suite peut être établie par récurrence. Voir plus bas.

Illustration.**Variations, monotonie d'une suite**

Montrons que la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$ n'est pas monotone.

- Le calcul des premiers termes de la suite donne $u_1 = 3 - u_0 = 3 - 2 = 1$, et $u_2 = 3 - u_1 = 3 - 1 = 2$.
- Comme $u_1 = 2 < u_0 = 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas croissante.
- Comme $u_2 = 2 > u_1 = 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Illustration.**Monotonie d'une suite à termes strictement positifs**

Quand une suite est à termes strictement positifs, sa monotonie peut être étudiée à l'aide des quotients $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n \times (u_n + 3) \end{cases}$.

On peut montrer par récurrence que tous les termes de cette suite sont bien définis et sont strictement positifs.

Sachant cela, le calcul $\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n + 3 \geq 3 \geq 1$, donne, pour tout $n \geq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$.

On en déduit que cette suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

Exercice 107.**Etudier la monotonie d'une suite****Exercice 108.****Etudier la monotonie d'une suite****Exercice 109.****Etudier la monotonie d'une suite**Illustration.**Démontrer par récurrence la monotonie d'une suite**

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$. On veut montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

On va montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n \geq 0$.

- Initialisation : Pour $n = 0$.

Le calcul du premier terme donne $u_1 = \sqrt{0^2 + 1} = 1$. On a donc $u_1 \geq u_0 \geq 0$ est la propriété est vraie au rang 0.

- Hérédité : On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_{k+1} \geq u_k \geq 0$.

On en déduit que $u_{k+1}^2 \geq u_k^2 \geq 0$, et que $1 + u_{k+1}^2 \geq 1 + u_k^2$, et enfin que $\sqrt{1 + u_{k+1}^2} \geq \sqrt{1 + u_k^2}$, c'est à dire que $u_{k+2} \geq u_{k+1}$.

Autrement dit, la propriété est vraie au rang $k + 1$.

- Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 110.**Prouver la monotonie d'une suite par récurrence**

Définition 2.8.5.**Convergence, nature d'une suite**

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite convergente si elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente⁵. Déterminer la nature d'une suite signifie déterminer si elle est convergente ou divergente.

*Illustration.***Déterminer la nature d'une suite**

On considère les deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ de termes généraux $u_n = n^2 - \frac{n}{n+1}$ et $v_n = n - \frac{n^2}{n+1}$.

- On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.
 - Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$, la limite du quotient $\frac{n}{n+1}$ est dans un premier temps indéterminée. On écrit alors $\frac{n}{n+1} = \frac{n \times 1}{n \times (1 + 1/n)} = \frac{1}{1 + 1/n}$.
Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 1/n} = 1$.
 - La limite de la différence $n^2 - \frac{n}{n+1}$ n'est donc pas indéterminée, et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - \frac{n}{n+1} = +\infty.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge.

- Pour lever les indéterminations sur sa limite, on écrit

$$v_n = \frac{n(n+1)}{n+1} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n(n+1) - n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Comme dans l'exemple précédent, on peut montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Ceci prouve que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

Exercice 111.**Déterminer la nature d'une suite****Théorème 2.8.2.****Théorème de convergence par encadrements**

On suppose que $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ sont trois suites réelles.

- Si $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ convergent vers un réel L , et si pour tout $n \geq 0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers L .
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ et si $n \geq 0$, $v_n \leq u_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 - Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$ et si $n \geq 0$, $u_n \leq w_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

5. Si $\lim u_n = \pm\infty$, alors la suite (u_n) est divergente.

Illustration.**Déterminer la limite d'une suite par encadrements**

On cherche à montrer l'existence et à déterminer la valeur de la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de terme général $u_n = n + (-1)^n$.

On sait que $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. On a donc $(-1)^n \geq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n-1$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n-1 = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Illustration.**Déterminer la limite d'une suite par encadrements**

On étudie la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{1}{2n + (-1)^n}$.

Comme précédemment, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < 2n - 1 \leq 2n + (-1)^n \leq 2n + 1$,

et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+(-1)^n} \leq \frac{1}{2n-1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+(-1)^n} = 0$.

Exercice 112.**Preuve de convergence par encadrements****Théorème 2.8.3.****Théorème de convergence monotone**

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle.

1. (a) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 (b) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et n'est pas majorée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
2. (a) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 (b) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et n'est pas minorée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Illustration.**Convergence monotone**

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et à valeurs positives. On considère la suite de terme général $v_n = \frac{1}{3 + u_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 3 \leq 3 + u_n$, et donc $\frac{1}{3 + u_n} \leq \frac{1}{3}$. Autrement dit, la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est majorée par $\frac{1}{3}$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$, et donc $3 + u_n \geq 3 + u_{n+1} > 0$, et $\frac{1}{3 + u_n} \leq \frac{1}{3 + u_{n+1}}$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$, et la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

Etant croissante et majorée, la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

Exercice 113.**Convergence monotone, raisonnement par l'absurde****Exercice 114.****Etude d'une suite, convergente monotone**

2.8.3 Suites arithmétiques, géométriques

Définition 2.8.6.

Suite arithmétique de raison r

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique quand il existe une constante r telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. On dit alors que r est la raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Propriété 2.8.4.

Terme général d'une suite arithmétique de raison r

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r$.

Illustration.

Monotonie et limite d'une suite arithmétique réelle

Etudions la monotonie et la convergence d'une suite arithmétique réelle de raison r .

- Si $r > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r \geq 0$, et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, et si $r > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} r \times n = +\infty$.
On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = u_0 + rn = +\infty$ et que la suite diverge.
- Si $r < 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r \leq 0$, et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, et si $r < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} r \times n = -\infty$.
On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = u_0 + rn = -\infty$ et que la suite diverge.
- Si $r = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0$, et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$ et que la suite converge.

Exercice 115.

Relations entre les termes d'une suite arithmétique

Propriété 2.8.5.

Sommes des premiers termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_n + u_0}{2}.$$

Définition 2.8.7.

Suite géométrique de raison q

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique quand il existe une constante q telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$. On dit alors que q est la raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Propriété 2.8.6.

Terme général d'une suite géométrique de raison q

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Propriété 2.8.7.

Sommes des premiers termes d'une suite géométrique

Soit $q \neq 1$ un nombre réel ou complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Propriété 2.8.8.**Nature de $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $q \in \mathbb{R}$** *Soit $q \in \mathbb{R}$.**1. Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.**2. Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.**3. Si $q < -1$, alors la suite $(q^n)_{n \geq 0}$ n'a pas de limite.***Exercice 116.****Variations d'une suite géométrique****Exercice 117.****Limite d'une suite géométrique****Exercice 118.****Variation et limite d'une suite arithmético-géométrique**

**CLASSES PRÉPARATOIRES
AUX GRANDES ÉCOLES
SCIENTIFIQUES**

MPSI



PCSI

Passeport pour l'aventure

*Troisième partie : Exercices d'entraînement et
d'approfondissement*

Table des matières

1	Complément : les nombres complexes	5
1.1	Forme algébrique d'un nombre complexe	5
1.2	Module d'un nombre complexe	8
1.3	Formes trigonométriques d'un nombre complexe	10
1.4	Formules de Moivre et d'Euler	15
2	Exercices d'entraînement et d'approfondissement	18

Chapitre 1

Complément : les nombres complexes

1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1.1.1.

Nombres complexes

On note i un nombre, qui n'est pas un nombre réel, tel que $i^2 = -1$. On appelle nombre complexe tout nombre z de la forme $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels. On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes. On admet que les propriétés usuelles de l'addition et du produit dans \mathbb{R} s'étendent à \mathbb{C} .

Illustration.

Calculs dans \mathbb{C}

- $(2 - 3i)(1 + i) = 2 + 2i - 3i - 3i^2 = 2 + 2i - 3i + 3 = 5 - i$.
- $i^3 = i^2 \times i = (-1) \times i = -i$, et $i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$.

Exercice 1.

Calculs dans \mathbb{C}

1. Donner la forme algébrique de $S = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6$.
2. En déduire la forme algébrique de $R = i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 + i^{10}$.

Exercice 2.

Calculs dans \mathbb{C}

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\frac{z+i}{2z-i} = 1 - 2i$.

Définition 1.1.2.

Parties réelle et imaginaire, forme algébrique

Soient x et y deux nombres réels, et z le complexe $z = x + iy$.

1. On dit que x est la partie réelle de z , et on note $x = Re(z)$. On dit que y est la partie imaginaire de z , et on note $y = Im(z)$.
2. On dit que l'expression $z = x + iy$ est la forme algébrique de z .
3. Si $y = 0$, le nombre $z = x$ est un nombre réel. Si $x = 0$, le nombre $z = iy$ est un nombre dit imaginaire pur. On notera $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Remarque 1.1.1.

Unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe

Un nombre complexe z admet une et une seule écriture sous forme algébrique. Autrement dit, si a, b, c et d sont quatre nombres réels, et si $a + ib = c + id$, alors $a = c$ et $b = d$. Ou encore : deux nombres complexes z_1 et z_2 sont égaux si et seulement leurs parties réelles et imaginaires sont égales.

Méthode. Résolution d'équations dans \mathbb{C} en passant par les formes algébriques

On cherche l'ensemble des nombres complexes z tels que $Re(z^2) = (Re(z))^2$, puis l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^2 = -1$.

1. Soient $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$. On calcule

$$z^2 = (a + ib)(a + ib) = a^2 - b^2 + i \times 2ab.$$

Autrement dit, $Re(z^2) = a^2 - b^2$, et $Im(z^2) = 2ab$.

2. On déduit du calcul précédent que

$$Re(z^2) = (Re(z))^2 \iff a^2 - b^2 = a^2 \iff b^2 = 0 \iff b = 0.$$

On conclut que $Re(z^2) = (Re(z))^2$ si et seulement si z est un nombre réel.

3. Comme $\begin{cases} Re(-1) = -1 \\ Im(-1) = 0 \end{cases}$, on a $z^2 = -1$ si et seulement si $\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$.

• L'équation $2ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$.

Si $b = 0$, alors $a^2 - b^2 = a^2$. Et l'équation $a^2 - b^2 = -1$ n'a pas de solution (a est un nombre réel).

Donc $\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$ implique $b \neq 0$, et $a = 0$.

• Si $a = 0$, $\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases} \iff -b^2 = -1 \iff b^2 = 1$.

L'équation $b^2 = 1$ admet deux solutions réelles qui sont $b = 1$ et $b = -1$.

On conclut que l'équation $z^2 = -1$ admet deux solutions complexes qui sont $z = i$ et $z = -i$.

Définition 1.1.3.**Conjugué d'un nombre complexe**

Soient x et y deux nombres réels, et z le complexe $z = x + iy$.

On appelle conjugué de z , le nombre complexe noté \bar{z} , qui est défini par $\bar{z} = x - iy$.

Autrement dit, $\begin{cases} Re(\bar{z}) = Re(z) \\ Im(\bar{z}) = -Im(z) \end{cases}$.

Méthode.**Mettre sous forme algébrique un quotient de nombres complexes**

Si a et b sont réels, et si $z = a + ib$, alors $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$ est un nombre réel positif. De plus, $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$ est nul si et seulement si z est nul.

Par conséquent, pour mettre sous forme algébrique un quotient de nombres complexes $A = \frac{z_1}{z_2}$, on commencera par multiplier le numérateur et le dénominateur de A par le conjugué \bar{z}_2 de son dénominateur.

Par exemple

$$A = \frac{2 - 3i}{1 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{2 - 3i - 8i - 12}{1^2 + 4^2} = \frac{-10 - 11i}{17} = \frac{-10}{17} + \frac{-11}{17}i.$$

Exercice 3.

Formes algébriques et calculs dans \mathbb{C}

Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

1. $z = (1 - 2i) \times \frac{i}{1 + i} + \frac{3}{2 - i}$.
2. $w = \frac{(1 + 3i)^2 + 8}{1 + 3i} - \frac{(2 - i)^2}{(1 + i)^2}$.

Propriété 1.1.1.

Caractérisation de \mathbb{R} et $i\mathbb{R}$ par conjugaison

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{z + \bar{z}}{2} = \text{Re}(z)$ | 3. $\frac{z - \bar{z}}{2i} = \text{Im}(z)$ |
| 2. $z \in \mathbb{R}$ | 4. $z \in i\mathbb{R}$ |
| $\iff z = \bar{z}$ | $\iff \bar{z} = -z$ |
| $\iff z - \bar{z} = 0$ | $\iff z + \bar{z} = 0$ |

Exercice 4.

Conjugué d'un nombre complexe, parties réelle et imaginaire

On pose $z = \left(\frac{2 + i}{1 - i}\right)^2$ et $w = \left(\frac{2 - i}{1 + i}\right)^2$.

1. Quel est le lien entre z et w ?
2. En déduire, en faisant un minimum de calculs, les formes algébriques de $u = z + w$ et de $v = z - w$.

Propriété 1.1.2.

Opérations algébriques et conjugaison

Soient deux nombres complexes z et z' .

- | | |
|---|--|
| 1. $\overline{(\bar{z})} = z$ | 3. $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ |
| 2. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ | 4. Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$. |

Exercice 5.

Calculs algébriques sur les complexes et les conjugués

1. Donner la forme algébrique de $A = (2 - 3i)(3 + 5i)$, et en déduire celle de $B = (2 + 3i)(3 - 5i)$.
2. En remarquant que $i \times (a + ib) = -b + ia$, en déduire la forme algébrique de $C = (2 + 3i)(5 + 3i)$.

Méthode.

Montrer qu'un nombre complexe est réel, ou imaginaire pur

Pour montrer qu'un nombre z complexe est réel, on montre que $\bar{z} = z$. Pour montrer qu'un nombre z complexe est imaginaire pur, on montre que $\bar{z} = -z$.

Illustration.

Montrer qu'un nombre complexe est réel, ou imaginaire pur

On suppose que z est un nombre complexe, tel que $^1 \text{Re}(z) \neq 0$, et on considère $w = \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}}$.

En utilisant les propriétés précédentes, on calcule :

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}}\right)} = \frac{\overline{(z - \bar{z})}}{\overline{(z + \bar{z})}} = \frac{\bar{z} - \bar{\bar{z}}}{\bar{z} + \bar{\bar{z}}} = -\frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}} = -w$$

Comme $\overline{w} = -w$, le nombre w est imaginaire pur.

¹ Question pour le lecteur : A quoi sert l'hypothèse $\text{Re}(z) \neq 0$?

Exercice 6.**Résolution d'équations du second degré dans \mathbb{C}**

- Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $4z^2 + 4z + 1 = 0$.
- Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $(z^2 + 2)(z^2 - 4z + 4) = 0$.
- Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $(z^2 - 2z)^2 - 4 = 0$.

Commencer par factoriser, et pas par développer.

1.2 Module d'un nombre complexe**Définition 1.2.1.****Module d'un nombre complexe**

Soient x et y deux nombres réels, et z le complexe $z = x + iy$.

On appelle module de z le nombre noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque 1.2.1.**Modules, parties réelles et imaginaires**

⚠ Si u et v ne sont pas réels, alors on peut avoir $z = u + iv$ et $|z|^2 \neq u^2 + v^2$.

Soit $z = 1 + \frac{1}{1+i}i$. Le nombre $\frac{1}{1+i}$ n'est pas un nombre réel et l'expression $z = 1 + \frac{1}{1+i}i$ n'est pas la forme algébrique de z . Autrement dit, $1 \neq \operatorname{Re}(z)$ et $\frac{1}{1+i} \neq \operatorname{Im}(z)$. Le module de z ne sera pas égal à $1^2 + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2$.

Pour déterminer le module de z , commençons par mettre $\frac{1}{1+i}$ sous forme algébrique.

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

On en déduit la forme algébrique : $z = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)i = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

Puis $|z|^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$, et $|z| = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Propriété 1.2.1.**Produit $z\bar{z}$**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le module de z est un réel positif, et $|z|^2 = z \times \bar{z}$.

Exercice 7.**Module et conjugaison**

On suppose que z et w sont deux nombres complexes tels que $\bar{z}w = -3 + 4i$.

Déterminer la forme algébrique de $z\bar{w}$, et la valeur de $|z|^2|w|^2$.

Remarque 1.2.2.**Module et valeur absolue**

Si x est un nombre réel, alors la valeur absolue de x est égale au module du nombre complexe $z = x + i \times 0 = x$.

⚠ Contrairement à la valeur absolue dans \mathbb{R} , en général pour $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 \neq z^2$.

Exercice 8.**Module du conjugué**

Montrer qu'il n'existe pas de nombre complexe z tel que $\frac{z}{\bar{z}} = 2$.

Exercice 9.**Caractérisation des complexes de module 1**

Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

*Illustration.***Relations entre modules**

Montrons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $z' \in \mathbb{C}$,

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

On calcule

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') = |z|^2 + z \times \bar{z}' + z' \times \bar{z} + |z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$$

$$\text{(avec } z' \times \bar{z} = \overline{z \times \bar{z}'} \text{ et } u + \bar{u} = 2\operatorname{Re}(u)\text{)}$$

et de même,

$$|z - z'|^2 = (z - z')(\bar{z} - \bar{z}') = |z|^2 - z \times \bar{z}' - z' \times \bar{z} + |z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$$

En additionnant les deux résultats, on obtient $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$.

Remarque géométrique.

Si \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AC} sont d'affixes respectives z , z' et $z + z'$ (c'est à dire que $ABCD$ est un parallélogramme), alors $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ est d'affixe $z - z'$.

L'égalité précédente, dite du parallélogramme, signifie que la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des 4 cotés du parallélogramme.

Exercice 10.**Module d'un nombre complexe**

On suppose que z est un nombre complexe de module 1.

Montrer que $|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 4$.

Exercice 11.**Résoudre une équation avec module et conjugué**

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $|z|^2 + (1 + 2i)\bar{z} = 0$.

Méthode.**Résoudre une équation avec des modules**

Pour résoudre une équation avec des modules, il peut être pratique de se ramener à des modules au carré, avant d'utiliser la formule $|z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$.

Cherchons les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $|z - 2i| = |z|$.

Comme $|z - 2i|$ et $|z|$ sont réels et de même signe (positif), l'équation $|z - 2i| = |z|$ équivaut à $|z - 2i|^2 = |z|^2$.

Notons $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$. Alors $|z - 2i|^2 = x^2 + (y - 2)^2$ et $|z|^2 = x^2 + y^2$.

Donc

$$\begin{aligned} |z - 2i| = |z| &\iff x^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 \\ &\iff y^2 - 4y + 4 = y^2 \\ &\iff 4 = 4y \\ &\iff y = 1 \end{aligned}$$

On conclut que $|z - 2i| = |z|$ si et seulement si $\operatorname{Im}(z) = 1$.

Propriété 1.2.2.**Propriétés du module**

Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $|z| = 0 \iff z = 0.$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n.$

2. $|\bar{z}| = |z|.$

5. Si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$

3. $|z z'| = |z| |z'|.$

Exercice 12.**Module d'un nombre complexe**1. Déterminer les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $|z - 3i| = |z + i|.$ 2. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, on a

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2.$$

Propriété 1.2.3.**Nombres complexes de module 1**Soit z un nombre complexe non nul.

$$|z| = 1 \iff z\bar{z} = 1 \iff \frac{1}{z} = \bar{z} \iff \frac{1}{\bar{z}} = z$$

Illustration.**Nombres complexes de module 1**

Soit z un nombre complexe différent de -1 . Montrons que z est de module 1 si et seulement si $\frac{z-1}{z+1}$ est imaginaire pur.

Écrivons $\frac{z-1}{z+1}$ sous forme de fraction avec un dénominateur réel positif :

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}+1)} = \frac{|z|^2 - 1 + z - \bar{z}}{|z+1|^2} = \frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2} + \frac{z - \bar{z}}{|z+1|^2}$$

On remarque que $\frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2}$ est un nombre réel, et que $\frac{z - \bar{z}}{|z+1|^2}$ est un nombre imaginaire pur.

Autrement dit, la forme algébrique de $\frac{z-1}{z+1}$ est $\frac{z-1}{z+1} = a + ib$ avec $a = \frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2}$

et $b = \frac{1}{i} \times \frac{z - \bar{z}}{|z+1|^2}.$

On conclut que $\frac{z-1}{z+1}$ est imaginaire pur si et seulement si $\frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2} = 0$, ce qui équivaut à $|z|^2 - 1 = 0$ et à $|z| = 1.$

1.3 Formes trigonométriques d'un nombre complexe

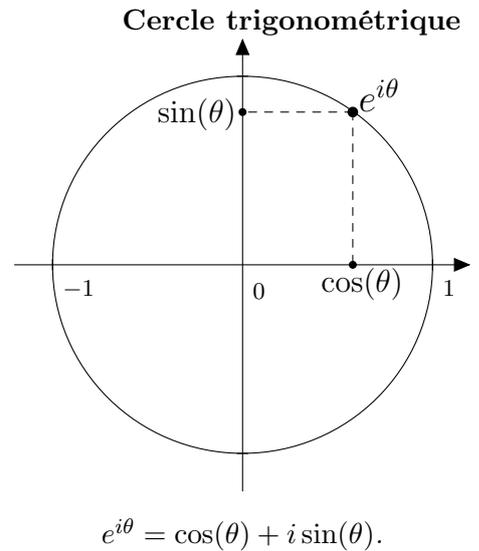
Définition 1.3.1.

On appelle cercle trigonométrique, ou cercle unité, l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On admet que si z est de module 1, alors il existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. On notera également ce nombre complexe $z = e^{i\theta}$.

On admet également que, pour tout θ réel et tout α réel,

$$e^{i\theta} = e^{i\alpha} \iff \theta \equiv \alpha [2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \alpha + 2k\pi.$$



Propriété 1.3.1.

- $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1.$
- $e^{i\pi} = -1.$
- $e^{i\pi/2} = i.$
- $e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$

Nombres complexes de module 1 usuels

- $e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$
- $e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$

Illustration.

Reconnaitre un nombre complexe de module 1 usuel

Soit $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Le calcul du module de z donne $|z|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Donc z est un nombre complexe de module 1, et il existe θ réel tel que $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$

Par identification des parties réelles et imaginaires, l'équation $\cos(\theta) + i \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ est équivalente à $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Grâce au cercle trigonométrique, on trouve que $\theta = \frac{3\pi}{4}$ convient.

On conclut que $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i3\pi/4}.$

Exercice 13.

Reconnaitre un nombre complexe de module 1 usuel

Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants.

1. $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

3. $v = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$

2. $u = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$

Propriété 1.3.2.

Produits et quotients de complexes de module 1

Soient $n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}.$

1. $e^{i\theta}e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}$

3. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)}$

2. $\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

4. $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Définition 1.3.2.**Formes trigonométriques d'un complexe**

On appelle forme trigonométrique, ou forme exponentielle, ou encore forme polaire, d'un nombre complexe z non nul toute expression de z sous la forme

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)),$$

où ρ est un réel strictement positif, et θ un nombre réel.

Méthode.**Mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique**

Pour mettre un nombre complexe z non nul sous forme trigonométrique :

1. on détermine le module de z ,

2. on écrit $z = |z| \times \frac{z}{|z|}$, et on cherche à reconnaître un complexe de module 1 usuel dans le quotient $\frac{z}{|z|}$.

Pour déterminer une forme trigonométrique d'un produit (ou d'un quotient), il est dans certains cas bon de commencer par déterminer une forme trigonométrique de chacun des facteurs, pour utiliser les propriétés 8.4 et 8.6 ci-dessus. Dans d'autres cas, il est préférable de commencer par déterminer la forme algébrique du produit (ou du quotient) avant d'en déterminer le module et d'en chercher un argument.

Illustration.**Mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique**

On pose $u = 2 + 2i$ et $v = 1 - i\sqrt{3}$.

On cherche des formes trigonométriques de u , de v , de $z = u^2 \times v$ et de $w = \frac{v}{u}$.

- On commence par calculer le module de u : $|u|^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, donc $|u| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

On en déduit que

$$u = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

- On calcule le module de v : $|v|^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4$, donc $|v| = 2$.

On en déduit que

$$v = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right] = 2e^{-i\pi/3}.$$

- On en déduit que $z = (2\sqrt{2}e^{i\pi/4})^2 \times 2e^{-i\pi/3} = 8e^{i2\pi/4} \times 2e^{-i\pi/3} = 16e^{i(\pi/2-\pi/3)} = 16e^{i\pi/6}$.

- De même, $w = \frac{2e^{-i\pi/3}}{2\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\pi/3-\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i7\pi/12}$.

Exercice 14.**Forme trigonométrique d'un nombre complexe**

1. On pose $z = \sqrt{3} + i$ et $w = 2 + 2i$.
 - (a) Calculer une forme trigonométrique de z et une forme trigonométrique de w .
 - (b) En déduire une forme trigonométrique de $u = zw$ et de $v = \bar{z}w^2$.
2. Soit m un réel quelconque. On pose $z_1 = \frac{z + 2i}{(1 + im)(1 + i)}$, $z_2 = \frac{(1 - im)(1 + i)}{m + 2i}$ et $z_3 = z_1 + i$.
 - (a) Calculer les modules de z_1, z_2 et z_3 .
 - (b) Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles z_1 est de module 1 ? Si oui, les décrire.

Propriété 1.3.3.**Formes exponentielles d'un complexe**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1. Si $z = \rho e^{i\theta}$ une forme exponentielle² de z , alors $\rho = |z|$.
2. Si z et z' sont deux complexes non nuls, de formes exponentielles $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = r e^{i\beta}$, alors

$$z = z' \iff \begin{cases} \rho = r \\ \theta \equiv \beta [2\pi] \end{cases}$$

Définition 1.3.3.**Arguments d'un nombre complexe**

Si $z = \rho e^{i\theta}$ est une forme trigonométrique, on dit que θ est un argument de z , et on note $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.

La propriété précédente montre que si z non nul admet pour argument θ , alors l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des nombres réels $\alpha_k = \theta + k2\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1.3.1.**Formes trigonométriques et arguments de $z = 1$**

Le nombre complexe $z = 1$ est de module 1. On en déduit que si $1 = \rho e^{i\theta}$ est une forme polaire de z , alors $\rho = 1$.

De plus, $1 = e^{i\theta}$ si et seulement si $\theta \equiv 0 [2\pi]$. Les arguments de $z = 1$ sont tous les nombres réels θ de la forme $\theta = 0 + 2k\pi$, pour un $k \in \mathbb{Z}$. On pourra noter $\arg(1) \equiv 0 [2\pi]$.

Illustration.**Arguments de $z \in \mathbb{R}^*$, de $z \in i\mathbb{R}^*$**

On cherche à caractériser le fait que $z \in \mathbb{R}^*$ ou que $z \in i\mathbb{R}^*$ par des conditions sur $\arg(z)$.

- On sait que 1 et -1 sont des nombres complexes de module 1. On a par exemple $1 = e^{i \times 0}$ et $-1 = e^{i\pi}$.

Soit z un complexe non nul.

- Si $z \in \mathbb{R}_-^*$, alors $z = |z| \times (-1) = |z|e^{i\pi}$ et $\arg(z) \equiv \pi [2\pi]$.

Réciproquement, si $\arg(z) \equiv \pi [2\pi]$, alors $z = \rho e^{i\pi} = -\rho$ où ρ est un réel strictement positif. Donc $z \in \mathbb{R}_-^*$.

On en déduit que $z \in \mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $\arg(z) \equiv \pi [2\pi]$.

- Si $z \in \mathbb{R}_+^*$, alors $z = |z| = |z| \times 1 = |z|e^{i0}$ et $\arg(z) \equiv 0 [2\pi]$.

Réciproquement, si $\arg(z) \equiv 0 [2\pi]$, alors $z = \rho e^{i0} = \rho$ où ρ est un réel strictement positif. Donc $z \in \mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que $z \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\arg(z) \equiv 0 [2\pi]$.

2. On rappelle que, par définition, $z = \rho e^{i\theta}$ est une forme exponentielle à condition que $\rho > 0$ et que $\theta \in \mathbb{R}$.

- On conclut que $z \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $\arg(z) \equiv 0 [2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv \pi [2\pi]$, ce qui revient à $\arg(z) \equiv 0 [\pi]$.
- On sait également que $i = e^{i\pi/2}$ et que $-i = e^{i3\pi/2}$. Comme précédemment, on montre que
 - $z \in i\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$,
 - $z \in i\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$,
 - et on conclut que z non nul est imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$, ce qui revient à $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Propriété 1.3.4.**Opérations sur les arguments**

On considère deux nombres complexes $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$
3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$
4. $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$

Méthode.**Déterminer un argument**

Pour déterminer un argument d'un nombre complexe non nul, il suffit d'en trouver une forme trigonométrique.

Illustration.**Arguments de $-z$**

On suppose que $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$, et on cherche un argument de $w = -z$.

Alors $z = |z|e^{i\theta}$ est une forme polaire de z , et $w = -z = -|z|e^{i\theta}$. Cette expression n'est pas une forme polaire de w car $-|z|$ n'est pas un nombre réel positif en général.

Comme $-1 = e^{i\pi}$, on peut écrire $w = e^{i\pi}|z|e^{i\theta} = |z|e^{i(\theta+\pi)}$, qui est une forme polaire de w . On en déduit que $\arg(w) \equiv \arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi [2\pi]$.

Exercice 15.**Opérations sur les formes polaires et arguments**

1. Déterminer une forme trigonométrique de $(\sqrt{3} - i)(1 + i)$.
2. En déduire que

$$\frac{\cos(\pi/12) + i \sin(\pi/12)}{1 + i} = \frac{\sqrt{3} - i}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 16.**Opérations sur les formes polaires et arguments**

1. Déterminer une forme polaire de $u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et de $v = 1 - i$.
2. En déduire une forme polaire de $z = \frac{u}{v}$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 17.**Résoudre une équation de la forme $z^2 = a$**

1. Rappeler une forme polaire de i .
2. Soit z un complexe non nul, de forme polaire $z = \rho e^{i\theta}$. Donner une forme polaire de z^2 .
3. En déduire que l'équation $z^2 = i$ admet exactement deux solutions complexes, qui sont $z_1 = e^{i\pi/4}$ et $z_2 = e^{i3\pi/4}$.

On remarquera que $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ équivaut à $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

1.4 Formules de Moivre et d'Euler**Propriété 1.4.1.****Formules d'Euler**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$1. \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$2. \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Illustration.**Linéarisation de $\cos^2(\theta)$**

Les formules d'Euler permettent en particulier de démontrer des formules de trigonométrie.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

La formule d'Euler pour le cosinus donne $\cos^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2$.

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) &= \frac{1}{4}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 = \frac{1}{4}(e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \cos^2(\theta) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta).$$

Exercice 18.**Linéarisation de $\sin^2(\theta)$**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule d'Euler pour $\sin(\theta)$.
2. En déduire que $\sin^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta) - 1}{2}$.

Exercice 19.**Somme de complexes de module 1**

Soit $\theta \in [0; 2\pi]$. On note $z = 1 + e^{i\theta}$.

1. Exprimer sous forme d'une somme de deux nombres complexes de module 1 le nombre complexe $w = e^{-i\theta/2}z$.
2. En déduire que $z = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$.
3. En déduire une forme trigonométrique de z .

Distinguer deux cas selon la valeur de $\theta \in [0; 2\pi]$.

Propriété 1.4.2.**Formule de Moivre**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Remarque 1.4.1.**Utilisation des formes exponentielles et algébriques**

Le sommes et différences de nombres complexes sont faciles à calculer quand ceux ci sont écrits sous forme algébrique. Par contre, les produits, inverses et quotients de nombres complexes sont faciles à calculer quand ceux-ci sont écrits sous forme exponentielle.

Pour déterminer la forme algébrique de $z = (1 - i)^5$ par exemple, on peut utiliser l'identité remarquable

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

mais ce n'est pas la méthode la plus simple.

Une forme exponentielle de $1 - i$ est $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. On en déduit que $z = (1 - i)^5 = (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^5 = 4\sqrt{2}e^{-i5\pi/4} = 4\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 + 4i$.

Exercice 20.**Utilisation des formes exponentielles et algébriques**

Soient $z = 1 + i$ et $w = \sqrt{3} - i$. On pose $A = z^3 - w^4$.

1. Déterminer une forme exponentielle de z , en déduire une forme exponentielle de z^3 , puis la forme algébrique de z^3 .
2. Déterminer une forme exponentielle de w , en déduire une forme exponentielle de w^4 , puis la forme algébrique de w^4 .
3. En déduire la forme algébrique de A .

Illustration.**Puissances réelles d'un nombre complexe**

Soit $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. On cherche les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles z^n est un nombre réel.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n = (\sqrt{2})^n (e^{i\pi/4})^n = (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4} = (\sqrt{2})^n \times \left[\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

- On sait qu'un nombre complexe w est réel si et seulement si $Im(w) = 0$.

On en déduit que z^n est réel si et seulement si $\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

- On sait aussi que les solutions de l'équation $\sin(\theta) = 0$ sont les $\theta \equiv \pi [2\pi]$ et $\theta \equiv 0 [2\pi]$. Autrement dit, $\sin(\theta) = 0$ si et seulement s'il existe un nombre p entier tel que $\theta = p\pi$.

– Si n est multiple de 4, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4p$, alors $n\frac{\pi}{4} = p\pi$. Dans ce cas, $\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \sin(p\pi) = 0$, et z^n est un nombre réel.

– Si n n'est pas multiple de 4, alors $\frac{n}{4}$ n'est pas un nombre entier, et $\sin\left(\frac{n}{4}\pi\right) \neq 0$, et z^n n'est pas un nombre réel.

- On conclut que z^n est réel si et seulement si n est multiple de 4.

Exercice 21. Argument d'une puissance d'un nombre complexe, nombres réels négatifs

On pose $z = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Déterminer une forme polaire de z .
2. Trouver une valeur de $n \in \mathbb{Z}$ telle que z^n est un réel négatif.
3. Déterminer toutes les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquelles z^n est un réel négatif.

Chapitre 2

Exercices d'entraînement et d'approfondissement

Exercice 1.

Propriétés des nombres entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que n est pair si et seulement si n^2 est pair.
2. Montrer que si n est le carré d'un entier impair, alors $n + 1$ est la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

Indication : un entier m est impair s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m = 2p + 1$.

Exercice 2.

Sommes et substitutions

Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$.

1. En raisonnant par récurrence, démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire une expression sans symbole \sum de $R_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (2n-1) + 2n$ en fonction de n , et une expression sans symbole \sum de $T_n = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + (2n-2) + 2n$ en fonction de n .

Exercice 3.

Sommes d'inégalités

1. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{2n-1} + u_{2n} \geq n u_{2n}$.

2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 4.

Passage à l'inverse et encadrements

On pourra dans cette exercice utiliser la croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}^+ .

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Exercice 5.**Inégalité avec des racines carrées**

Déterminer l'ensemble des x réels tels que $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} \leq 7$.

Exercice 6.**Second degré, signe, trigonométrie**

1. Factoriser le trinôme $P(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, et résoudre $P(x) \geq 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $\cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} = (\cos(t) + 1)(\cos(t) - 1/2)$,
et résoudre l'inéquation $\cos^2(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} \geq 0$, d'inconnue $t \in [0; 2\pi]$.

Exercice 7.**Inéquations qui se ramènent à une équation du second degré**

1. Résoudre $x^2 - x \geq 2$, et en déduire les solutions de $y^4 - y^2 \geq 2$.
2. Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$.
3. Résoudre $\cos^2(x) - 3\cos(x) + 2 \geq 0$.

Exercice 8.**Un carré est positif**

On suppose que x et y sont des réels strictement positifs.

1. Montrer que $\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$.
2. En déduire que $\frac{x+y}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$.

Exercice 9.**Somme nulle de termes positifs**

On cherche les couples (x, y) de coordonnées des points M du plan \mathbb{R}^2 tels que $2x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4 = 0$.

1. Montrer qu'il existe A et B , qui s'expriment en fonction de x et y , tels que $2x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4 = A^2 + B^2$.
2. En déduire que $2x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4 = 0$ admet une unique solution et la déterminer.

Exercice 10.**Calculs de dérivées**

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée de la fonction définie par :

1. $f(x) = \sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x}$
2. $f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ (dérivées premières et secondes)
4. $f(x) = \ln^3 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$
5. $f(x) = \sqrt{\cos(2x)}$
6. $f(x) = \frac{\sin^3(2x)}{\cos^2(3x)}$

Exercice 11.**Dérivée, signe et monotonie**

On suppose que $\lambda < 2$ et on pose $f : x \mapsto \frac{\cos^2(x) + \lambda \sin^2(x)}{\sin(x)}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $I =]0; \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que $f'(x) = (\lambda - 2) \cos(x) - \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)}$ sur I .
3. En déduire que f est décroissante sur I .

Exercice 12.**Calculs de limites**

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - 3} + x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{\frac{\ln x}{x} + 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) e^{-\frac{1}{x}}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} + 2x$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin(2x)}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin(2x)}$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

Exercice 13.**Nombres de Fermat**

Pour n entier naturel, le n ème nombre de Fermat est l'entier $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 , vérifier que ces nombres sont premiers.
2. (a) Justifier les égalités suivantes :

$$2^{32} = 16 \times 2^{28} = (641 - 5^4) \times 2^{28} = 641m - (5 \times 2^7)^4 = 641m - (641 - 1)^4 = 641n - 1$$

où m et n sont deux entiers.

- (b) F_5 est-il premier ?
3. Donner une estimation du nombre de chiffres dans l'écriture en base 10 de F_{10} , de F_{20}

Exercice 14.**Calcul de limite**

Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\exp(x) - 1}{\sqrt{x}} \right)$.

On pourra utiliser la limite connue de $\frac{e^x - 1}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 15.**Etude de fonctions, encadrements**

1. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

2. Utiliser cette double inégalité pour donner le meilleur encadrement possible de $\ln(1,2)$.

Exercice 16.**Etude de fonction**

On considère la fonction de la variable réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe.
2. Exprimer $f'(x)$ et étudier son signe suivant x .
3. (a) Montrer que pour tout $x > 1$, $f(x) = \frac{1}{x-1} [1 + (x-1)(\ln(x-1))] - \ln(x)$.
 (b) Montrer que $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln(u) = 0$.
 (c) En déduire l'existence et la valeur de la limite de f en 1^+ .
On pourra poser $u = x - 1$ pour lever une indétermination.
4. Construire le tableau de variation de f .
5. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
6. En déduire le signe de $f(x)$ suivant x .

Exercice 17.**Etude d'une suite de fonctions**

Soit n un entier naturel supérieur à 2. On désigne par f_n la fonction de la variable réelle x telle que :

$$f_n(x) = \frac{2+x}{2-x} - n \ln(x+n)$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f_n ?
2. Déterminer le tableau de variation de f_n et les limites aux bornes (on distinguera le cas $n=2$).
3. En déduire que, pour tout x appartenant à $[0, 2[$, $f_n(x) \geq f_n(0)$.
4. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$ et tout x appartenant à $[0, 2[$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{2+x}{2-x}$$

Exercice 18.**Etude de fonction trigonométrique**

On pose, pour tout x réel, $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

1. Préciser le domaine D_f de définition de cette fonction, déterminer une période et étudier la parité de f .
2. Construire son tableau de variation sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Construire la courbe de f sur cet intervalle.
4. Compléter pour représenter f sur $[-2\pi, 2\pi] \cap D_f$.

Exercice 19.**Limites de fonctions trigonométriques**

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 20.**Etudes de fonctions trigonométriques**

On pose, pour tout x réel, $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

1. Déterminer une période de f .
2. Représenter f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
3. Vérifier à l'aide d'une calculatrice.

Exercice 21.**Etudes de fonctions trigonométriques, encadrements**

Démontrer que, pour tout réel x positif, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

Exercice 22.**Calculs d'intégrales**

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1. (a) Calculer la dérivée sur \mathbb{R}_+ de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, et la simplifier sous la forme $\frac{1}{\varphi(x)}$.
 (b) En déduire la valeur de u_0 .
 (c) Calculer u_1 .
2. (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
 (b) Que peut-on en conclure pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 (c) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \int_0^1 x^n dx$.
 (d) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 23.**Opérations sur les suites majorées**

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle majorée par A et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle majorée par B .

1. Montrer que la suite de terme général $w_n = u_n + v_n$ est majorée.
2. Donner un exemple où la suite de terme général $z_n = u_n \times v_n$ n'est pas majorée.

Exercice 24.**Suites bornées**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 4$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par -2 et majorée par 1 . Montrer qu'il existe M réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Exercice 25.**Etude d'une suite définie implicitement**

On note f la fonction définie par $f(x) = e^{-x} - x$ sur \mathbb{R} .

1. Montrer que f est strictement monotone sur \mathbb{R} , et déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_n) = \frac{n+1}{n}$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone et bornée.
4. Déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Exercice 26.**Suite dont l'étude se ramène à une suite arithmétique**

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2^n + 3 \end{cases}$.

On introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - 2^n$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} , puis exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3n$.

Exercice 27.**Raisonnement par disjonction de cas**

Montrer que si une suite arithmétique réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors elle converge.

Exercice 28.**Suite se ramenant à une suite géométrique**

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} , puis exprimer v_{n+1} en fonction de u_n .
2. En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$.
3. En déduire que $(v_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 29.**Etude d'une suite définie par des sommes**

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2^k}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq 1 - \frac{1}{2^n}$.
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. (Il n'est pas demandé de déterminer sa limite.)

Exercice 30.**Vrai ou Faux ?**

Déterminer si chacune des affirmations ci-dessous est vraie ou fautive.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left| -z^{-1} \right| = -\frac{1}{|z|}$.
2. Si $\operatorname{Re}(z) < -2$, alors $|z| > 2$.
3. Pour tout z complexe et tout z' complexe, $z = z' \iff |z| = |z'|$.
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|1 + iz| = \sqrt{1 + z^2}$.
5. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \in i\mathbb{R} \iff |z|^2 + \frac{1}{2}(z^2 + \bar{z}^2) = 0$.

Exercice 31.**Module d'un nombre complexe**

Pour a et b réels et non tous les deux nuls, calculer le module de $z = \frac{a + 2ib}{4b - 2ia}$.

Ce résultat reste-t-il vrai si a et b sont complexes ?

Exercice 32.**Module d'un nombre complexe**

On suppose que z et w sont deux nombres complexes distincts.

1. On suppose que $|z| = |w|$. Montrer que le nombre complexe $u = \frac{z + w}{z - w}$ est imaginaire pur.
2. On suppose que le nombre complexe $u = \frac{z + w}{z - w}$ est imaginaire pur. Montrer que $|z| = |w|$.

Exercice 33.**Caractérisations des nombres réels dans \mathbb{C}**

Soit z un nombre complexe.

Montrer que $(z^2 + 2z + 4) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\left(z \in \mathbb{R} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = \frac{-3}{2}\right)$.

Exercice 34.**Résoudre une équation de la forme $z^n = a$**

1. Rappeler une forme polaire de 1.
2. Soit z un complexe non nul, de forme polaire $z = \rho e^{i\theta}$. Donner une forme polaire de z^3 .
3. En déduire que l'équation $z^3 = 1$ admet exactement trois solutions complexes, qui sont $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i2\pi/3}$ et $z_2 = e^{i4\pi/3}$.

Exercice 35.**Formules d'Euler**

1. En utilisant les formules d'Euler, exprimer $u(\theta) = \sin^3(\theta) \cos(\theta)$ comme une somme de fonctions sinusoidales.
2. En déduire une primitive de la fonction $u : \theta \mapsto \sin^3(\theta) \cos(\theta)$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 36.**Formule de Moivre**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Calculer de deux manières $z = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3$.
2. En déduire que $\cos(3\theta) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)$ et que $\sin(3\theta) = \sin(\theta)[4 \cos^2(\theta) - 1]$.
3. En déduire que le nombre réel $x = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est solution de l'équation $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$.

Exercice 37.**Nombres complexes et trigonométrie**

Soit $\alpha \in]0; \pi[$ et soit z un complexe vérifiant $z + \frac{1}{z} = 2 \cos(\alpha)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos(n\alpha)$.

On pourra commencer par calculer les valeurs possibles pour z , ou bien faire une démonstration par récurrence.