

Quelques conseils de travail en mathématiques avant la rentrée en MPSI

30 juin 2024

FÉLICITATIONS ET BIENVENUE EN MPSI !

Vous êtes sur le point de débiter 2 ou 3 années passionnantes, durant lesquelles vous allez découvrir les sciences à un niveau avancé, et préparer les concours d'entrée des écoles d'ingénieur. Vous allez être accompagné, dans un excellent cadre pédagogique, dans l'étude des mathématiques, de la physique-chimie et des autres disciplines. Vous allez aussi découvrir et largement développer votre capacité à travailler, de façon régulière, efficace et méthodique. La grande rigueur, les grandes capacités de compréhension, d'analyse et de synthèse, que vous allez développer en CPGE resteront pour vous des atouts majeurs, pour toute votre vie future, professionnelle et personnelle.

En MPSI, le programme de mathématiques s'appuie sur le programme de spécialité de terminale. En début de l'année, pour faire le point sur les acquis de chaque élève, un test de rentrée sera organisé en mathématiques. Pour réussir au mieux l'an prochain, au test de rentrée et par la suite, il est bon que vous soyez dès le 1er septembre au point sur un certain nombre de notions et savoir-faire fondamentaux. Ce document et ceux qui l'accompagnent ont été rédigés pour vous aider à faire quelques révisions cet été.

En attendant de vous rencontrer à la rentrée, je vous souhaite un excellent été.

Du travail pour cet été

Le test de rentrée portera sur les programmes de spécialité de première et de terminale. Il ne comportera aucune question relevant du programme de maths expertes en terminale. Il contiendra une majorité de questions calculatoires, et contiendra quelques questions nécessitant également un peu de raisonnement.

Le sujet du test de rentrée 2023 est ci dessous.

Utilisez le test de rentrée 2023 pour faire le point sur vos acquis et vos lacunes. Coupez le sujet en 2 à votre convenance, et prévoyez 3 heures pour chercher chacune des deux moitiés que vous aurez choisies.

Pour les élèves qui auraient du mal à s'auto-évaluer et à déterminer ce qu'ils gagneraient à réviser, j'ai écrit des exercices et corrections complémentaires au test de rentrée. Je n'inclus pas tout dans ce document pour ne pas le surcharger. Une fois la phase principale de parcoursup terminée, mi juillet, j'enverrai, à l'adresse email que vous avez renseignée dans parcoursup, des éléments de correction du test de rentrée 2023 et des documents complémentaires.

En fonction de ce que vous savez faire ou non, révisez les programmes de première et terminale. Travaillez notamment les questions calculatoires, en vous utilisant les cahiers de calcul présentés plus bas.

Pour ceux qui n'ont pas fait maths expertes, rattraper ce programme durant l'été n'est pas indispensable. Si vous avez envie de le faire, travaillez en priorité les nombres complexes (et la trigonométrie). Ils sont fondamentaux en mathématiques, et en physique et en SI.

Test de rentrée 2023**Exercice 1.****Calculs élémentaires**

1. Calculer $A = 2023 \times 2024$.

2. Développer $B = (x - y)^4$.

3. Simplifier $C = \frac{4 - 9\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}$.

Mettre le résultat sous la forme $C = a + b\sqrt{5}$.

5. Simplifier $P = \frac{6^2 \times 10^3 \times 15^{-1}}{2^6 \times 3^{-2} \times 5^3}$. Mettre le résultat sous une forme $2^a \times 3^b \times 5^c$.

6. Simplifier $E = \frac{e^{7x-2} \times (e^{2x})^{-7}}{e^{7-2x} \times (e^{7x})^{-2}}$. Mettre le résultat sous une forme e^{ax+b} .

7. Simplifier $L = \ln(21) - \ln(\sqrt{7}) + 2 \ln\left(\frac{1}{9}\right)$. Mettre le résultat sous une forme $L = a \ln(3) + b \ln(7)$.

8. Simplifier $M = \ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(e^4))}\right)$.

9. Pour tout x réel, on pose $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$.

Simplifier $g(x) = f(f(x))$. Mettre le résultat sous forme d'un quotient de polynômes et effectuer les simplifications naturelles entre numérateur et dénominateur.

4. Simplifier $D = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$.

Exercice 2.**Dérivées**

Sans justifier étudier le domaine, sans justifier la dérivabilité, calculer la dérivée de chaque des fonctions définies ci dessous.

1. $a(x) = 2\sqrt{x} - 5x^2 + 3e^x - 4 \ln(x)$.

2. $b(x) = 2 \cos(x) + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$.

3. $c(x) = \sqrt{3x+2} + e^{7x-3} - \frac{1}{2x+5}$.

4. $d(x) = x^2 \sin(x)$.

5. $e(x) = \frac{1}{\ln(x)}$.

6. $f(x) = \frac{x+2}{x-7}$.

7. $g(x) = \frac{e^x + 3}{e^{2x+1}}$.

8. $h(x) = \sin(x^4 + 1)$.

9. $i(x) = \sin^4(x) + 1$.

10. $j(x) = (\sin(x) + 1)^4$.

Exercice 3.**Etude de fonction**

Pour tout x réel, on pose $f(x) = x - \sin(x)$.

1. Montrer que f est impaire sur \mathbb{R} .

2. Calculer la dérivée de f sur \mathbb{R} et justifier que f est croissante sur \mathbb{R} .

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

4. Montrer que f est convexe sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
6. Construire le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
7. Montrer que pour tout x réel positif, on a $\sin(x) \leq x$.

Exercice 4.**Trigonométrie**

En trigonométrie notamment, vous pouvez vous aider de schémas, bien lisibles, clairs et propres, pour mener vos raisonnements et rédiger vos réponses. Par exemple, vous pouvez tracer des cercles (au compas).

1. Donner la valeur de : $A = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $C = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
2. Donner la valeur de : $D = \cos\left(\frac{2023\pi}{2}\right)$, $E = \sin\left(\frac{2023\pi}{6}\right)$.
3. (a) Déterminer tous les $a \in [-\pi, \pi]$ tels que $2 \cos(a) + 1 = 0$.
(b) Déterminer tous les $b \in [0, 4\pi]$ tels que $2 \cos(b) + 1 = 0$.
4. (a) Déterminer tous les $x \in [0, 2\pi]$ tels que $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$.
(b) Déterminer tous les $y \in [-\pi, 3\pi]$ tels que $\sin(y) \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 5.**Equations, inéquations**

1. (a) Résoudre le système $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$, d'inconnues a, b réelles.
(b) Résoudre le système $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 2x^2 + y = 5 \end{cases}$, d'inconnues x, y réelles.
(c) Résoudre le système $\begin{cases} u + w^2 = 2 \\ 2u + w^2 = 5 \end{cases}$, d'inconnues u, w réelles.
2. (a) Résoudre l'équation $t^2 = t + 12$, d'inconnue t réelle.
(b) Résoudre l'équation $a = \sqrt{a} + 12$, d'inconnue a réelle.
(c) Résoudre l'équation $e^{2b} = e^b + 12$, d'inconnue b réelle.
(d) Résoudre l'équation $c = \sqrt{c + 12}$, d'inconnue c réelle.
3. Résoudre l'inéquation $\frac{x}{x+2} \geq \frac{1}{1-x}$ d'inconnue x réelle.
4. (a) Résoudre l'inéquation $y^2 \geq y + 12$, d'inconnue y réelle.
(b) Résoudre l'inéquation $\ln^2(z) \geq \ln(z) + 12$, d'inconnue z réelle.
(c) Résoudre l'inéquation $\ln(t^2) \geq \ln(t + 12)$, d'inconnue t réelle.

Exercice 6.**Suites, raisonnement par récurrence**

Toutes les réponses doivent être justifiées. Les questions 3 sont indépendantes des questions 2. Les résultats des questions 2 sont inutiles/hors sujet pour les questions 3. Même si vous bloquez à un certain point dans les questions 2, vous pouvez chercher et réussir les questions 3.

1. On pose $a = 1 - \sqrt{2}$.
 - (a) Déterminer le signe de a .
 - (b) Calculer (simplifier) : $b = a^2 - 2a + 1$.
2. On considère une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 1$.
 - (a) Calculer x_1, x_2, x_3 et x_4 .
 - (b) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on appellera $P(n)$ l'affirmation suivante : " $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ ".
 - i. L'affirmation $P(0)$ est elle vraie ou fausse ?
 - ii. L'affirmation $P(1)$ est elle vraie ou fausse ?
 - iii. L'affirmation $P(2)$ est elle vraie ou fausse ?
 - iv. On note k un entier naturel fixé. Montrer que si l'affirmation $P(k)$ est vraie, alors l'affirmation $P(k+1)$ est également vraie.
 - v. Quelle est la conclusion naturelle des résultats obtenus aux questions précédentes (les questions 2b i à iv) ?
 - (c) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle monotone ?
 - (d) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle bornée ?
3. On considère une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 1 \end{cases}$$
 - (a) En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 4$.
 - (b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $t^2 - 2t + 1 \geq t + 1$.
 - (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 1 + u_n$.
 - (d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 4 + n$.
 - (e) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle monotone ?
 - (f) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle bornée ?
 - (g) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a t elle une limite, et si oui laquelle ?

Exercice 7.**Primitives**

Sans justifier l'existence, sans préciser un intervalle de validité, calculer une primitive de chaque des fonctions définies ci dessous. *Pour tout calcul demandé : les étapes/justifications/explications doivent figurer sur votre copie et le résultat doit être encadré ou surligné.*

$$1. a(x) = x^3 - x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}.$$

$$2. b(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2} - 3 \cos(x).$$

$$3. c(x) = e^{3x-1} - \frac{1}{7x-4} + \sin(2x+3).$$

$$4. d(x) = (2x-7)e^{x^2-7x+2}.$$

$$5. e(x) = (2x+4) \cdot (x^2+4x+1)^3.$$

$$6. f(x) = \frac{2e^{2x+1}}{e^{2x+1}+3}.$$

$$7. g(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+3}}.$$

$$8. h(x) = \frac{4x^3+1}{(x^4+x+3)^2}.$$

Exercice 8.**IPP, Intégrales et primitives**

Pour toute question : les justifications ou étapes doivent figurer sur votre copie et le résultat doit être encadré ou surligné.

1. (a) A l'aide d'une IPP, calculer $A = \int_0^1 te^{2t} dt$.
- (b) A l'aide d'une IPP, déterminer une primitive de la fonction u définie par $u(x) = \ln(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .
2. Pour tout x réel, on pose $a(x) = x^2 + e^x$.
 - (a) Déterminer toutes les primitives de a sur \mathbb{R} .
 - (b) Combien de primitives A de a vérifient la condition $A(0) = 3$? S'il en existe, donner explicitement cette ou ces primitive(s).
 - (c) On pose $b(x) = 3 + \int_0^x (t^2 + e^t) dt$.
La fonction b est elle une des primitives de a ? Si oui, sans aucun calcul supplémentaire, déterminer une expression de $b(x)$, valable pour tout x réel.
3. On suppose que f, g sont deux fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} , de dérivées continues sur \mathbb{R} . Pour tout x réel, on pose $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.
 - (a) Rappeler la formule du cours qui permet d'exprimer la dérivée de h en fonction des dérivées de f, g .
 - (b) Justifier que $h(2) - h(1) = \int_1^2 h'(t) dt$.
 - (c) Justifier que $h(2) - h(1) = \int_{g(1)}^{g(2)} f'(t) dt$.
 - (d) En déduire que $\int_1^2 f'(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_{g(1)}^{g(2)} f'(t) dt$.

Cahiers de calcul

Dans le cadre de l'UPS¹ ont été rédigés des "cahiers de calcul" destinés aux élèves de première (spécialité maths), aux élèves de terminale (spécialité maths et maths expertes) et aux élèves en début de première année de CPGE scientifique.

On y trouve des exercices calculatoires corrigés. Différentes fiches balayent les différents chapitres des programmes. Elles sont très bien construites et présentées, agréables à utiliser. Dans les cahiers pour le lycée, chaque fiche commence par quelques questions de calcul très simples pour vous échauffer, puis contient des questions de difficulté intermédiaire, et se termine par quelques questions un peu plus ambitieuses. Pour chaque question, un cadre-réponse est prévu. En fin de fiche se trouvent les réponses aux différentes questions, mélangées, dans le désordre. Et en fin de document, après les fiches, se trouvent les réponses aux questions et des corrections plus ou moins détaillées.

Ces documents sont à la fois disponibles gratuitement en ligne, et sont disponibles en librairie (éditions Vuibert) à des tarifs très raisonnables. Vous pouvez par exemple les télécharger sur le site de la personne qui a coordonné leur rédaction. Pour les 3 cahiers de calcul : mathématiques spécialité en première, mathématiques spécialité en terminale et maths expertes en terminale, rendez-vous sur la page web colasbd.github.io/cdc-lycee/. Pour le cahier de calcul pour les élèves en début de prépa scientifique, rendez vous sur la page : <https://colasbd.github.io/cdc/>.

Tout le programme de première et tout le programme de terminale sont à maîtriser sérieusement pour partir sur de bonnes bases en MPSI. Pour nuancer davantage les choses, et vous aider à être efficace cet été, voici quelques remarques sur différents thèmes que les cahiers de calcul vous permettent de travailler.

1. L'association des professeurs de mathématiques et de physique en CPGE scientifiques

Ne négligez pas les calculs élémentaires, y compris les calculs avec les fractions, les puissances, etc, que vous avez découverts au collège. Beaucoup d'élèves commettent fréquemment des erreurs très élémentaires. Pour n'en citer que deux : $(a + b) \times c \neq a + b \times c$ et $-\frac{a + b}{c} = \frac{-a - b}{c} \neq \frac{-a + b}{c}$. Si vous en avez besoin, profitez de cet été pour vous entraîner sérieusement sur les calculs élémentaires. Il faut connaître, parfaitement : les calculs avec des fractions et de puissances, la trigonométrie, les fonctions exponentielles et logarithme, les calculs de dérivées, et les calculs de primitives et d'intégrales, le cours sur les suites, les sommes et les produits.

Pour le cours d'optique géométrique en physique, vous aurez aussi besoin de notions trigonométriques antérieures au programme de première et terminale. Notamment les relations élémentaires dans un triangle rectangle. Ma collègue de physique signale tous les ans les difficultés de certains élèves sur ce point. Ces questions ne sont pas reprises dans les cahiers de calcul de première et terminale. Si vous en avez besoin, révisez vos cours de collège.

Conformément au programme officiel, le cours de probabilités en MPSI a lieu au semestre 2. Ces chapitres de première et terminale ne vous seront pas utiles au semestre 1. A vous de voir si vous voulez les réviser cet été. Le programme de mathématiques de terminale contient une large part du programme de probabilités de MPSI (plus de 50%). Mais la plupart des élèves un niveau très faible sur ces questions. Si vous voulez travailler ces chapitres, le conseil principal est : travaillez avec rigueur, manipulez correctement des objets mathématiques précis. Ne vous contentez pas d'intuitions confuses venues de schémas jamais codifiés.

La combinatoire (le dénombrement) est une partie des mathématiques assez difficilement communicable à des élèves qui ne maîtrisent pas un certain nombre d'objets fondamentaux abstraits (ensembles, applications, ...). Sans maîtriser ces notions, on ne peut pas formaliser les situations et les questions, et on travaille dans un grand flou. Je ne vous recommande pas de bachoter les exercices de dénombrement concrets du cahier de calcul de terminale. Nous aborderons ces questions au semestre 2. Grâce à un travail sérieux dès le début de l'année, vous aurez considérablement progressé, et vous serez à ce moment là capable de manipuler plus précisément les objets et situations rencontrés.

La géométrie est quasiment absente des programmes de mathématiques en CPGE. Au mois de juin, nous ferons un petit peu d'algèbre euclidienne. A cette occasion, nous reprendrons ce que vous avez appris sur les produits scalaires en première et terminale. Par contre, la géométrie est fondamentale pour certains cours de physique et de sciences de l'ingénieur. Soyez autant que possible à l'aise sur le calcul avec des vecteurs. En septembre, le cours de SI commence par des révisions et approfondissements sur les bases orthonormées dans \mathbb{R}^3 , les coordonnées dans une base, etc (programme de spécialité maths en terminale). Les fiches concernées dans le cahier de calcul de première sont les fiches 20, 21, 22. Et celles du cahier de terminale sont les fiches 27, 28, 29.

Concernant le programme et le cahier de calcul de maths expertes en terminale : être au point, sérieusement, sur les nombres complexes serait une excellente chose pour vous à la rentrée. Le calcul matriciel est secondaire pour votre travail cet été. Nous aborderons ces questions à la fin du semestre 1. Elles sont assez faciles et ne mettent que très peu d'élèves en difficultés. L'arithmétique est également secondaire pour votre travail cet été.

Le cahier de calcul pour les élèves en début de prépa scientifique contient aussi beaucoup de questions abordables pour vous cet été. Si vous voulez faire des calculs avec un niveau de technicité un peu plus élevé, vous pouvez avec profit regarder une grande partie des fiches : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 18, 19, 21, 26, 28. Certaines parties de ces fiches, et les fiches qui ne sont pas citées ici, contiennent des questions utilisant le programme de MPSI (hors programme pour un élève de terminale). Ne vous inquiétez pas si vous ne savez pas faire certaines de ces questions.

Des remarques et conseils usuels de début de MPSI

Ci dessous sont rédigées un certain nombre de choses que nous travaillerons à partir de la rentrée. Si vous voulez fournir le travail le meilleur et le plus efficace cet été, vous pouvez dès maintenant en prendre connaissance. Que vous lisiez ou non les remarques et conseils qui suivent, il est très important que vous abordiez votre entrée en MPSI avec optimisme et confiance en vous. En raison des programmes officiels et des concours, le rythme et l'ambition des cours que vous suivrez en CPGE seront sensiblement supérieurs à ceux du lycée. Cela étant, il n'est pas attendu que vous dépassiez le programme de terminale tout seul cet été. Le cours de MPSI démarre en douceur en septembre, dans le prolongement du programme du lycée. Sur la base

de vos acquis de première et terminale, et grâce à un travail très régulier et efficace à partir de septembre, vous serez dans les meilleures conditions pour réussir l'année prochaine en MPSI.

Ne négligez pas les questions "élémentaires". En se basant sur les années précédentes, je m'attends à ce que travailler les calculs de base soit utile à un certain nombre des élèves en septembre. Y compris parmi les élèves qui ont eu d'excellentes notes en terminale et au bac. En prépa, vous aurez besoin d'une grande aisance, maîtrise et fluidité, en calcul. Non seulement pour le cours de mathématiques, mais aussi pour ceux de physique et de sciences de l'ingénieur. Il ne vous suffira plus l'an prochain de connaître les formules fondamentales de façon approximative, ou savoir faire des calculs mais en vous trompant régulièrement, ou savoir faire des calculs mais trop lentement. Vous aurez besoin de connaître toutes les formules du cours de première et terminale, immédiatement et exactement, et vous aurez besoin de savoir les utiliser vite et bien.

En DS en prépa et aux concours, une copie pas assez propre sera sanctionnée. Vous devez écrire en français, de façon lisible, et sur les lignes de la feuille (de gauche à droite et de haut en bas). Certains élèves ont de grandes difficultés sur ce point. Utilisez toutes les occasions pour vous entraîner à rédiger efficacement au propre. Pour progresser, il faut s'entraîner. Par conséquent, quand vous cherchez un exercice de mathématiques, mettez toujours vos réponses au propre, comme vous auriez à le faire en DS.

Dans tous les exercices de mathématiques, toutes les réponses doivent être justifiés et les résultats encadrés. Pour tout calcul demandé : les étapes essentielles doivent figurer sur votre copie. Il faut soigner le raisonnement et la rédaction : vous écrivez des phrases, et vous indiquez les articulations logiques entre vos différentes affirmations successives. Manipuler correctement des quantificateurs n'est pas demandé avant le bac, mais deviendra un objectif majeur dès le début de votre MPSI. Faites le autant vous en êtes capable. Là aussi, vous progresserez en pratiquant, avec sérieux. Pour bien faire des mathématiques, vous devez maîtriser suffisamment ce que vous faites pour savoir que c'est exact. Soyez toujours très précis, honnête et rigoureux. N'affirmez jamais un résultat sans savoir clairement pourquoi il est vrai. Ne répondez pas au hasard avant de regarder une correction "au cas où".

Si vous n'avez pas réussi à faire une question, en vous aidant d'une correction, identifiez précisément les erreurs commises ou les lacunes qui sont en cause. Une correction ne doit jamais être survolée. Plus généralement, lire un texte mathématique signifie le décortiquer. Une proportion assez importante des élèves qui ont de sérieuses difficultés en CPGE ont une lecture du cours et des corrections d'exercices trop superficielle. Cela les empêche de comprendre véritablement comment et pourquoi certaines choses fonctionnent, et cela les empêche de réussir par la suite quand une situation identique ou proche leur est présentée. Quand vous utilisez un corrigé, vérifiez systématiquement chaque étape, de calcul ou de raisonnement. Lisez en réfléchissant, avec attention et application. Pour chaque affirmation que vous lisez, posez vous systématiquement les 3 questions fondamentales : "Qu'est ce que ça veut dire ?" (vérifiez que vous maîtrisez parfaitement le vocabulaire employé), "Pourquoi c'est vrai ?" (vérifiez que vous savez très exactement de quelles informations acquises antérieurement l'affirmation que vous lisez maintenant découle) et "A quoi ça sert ?" (comprenez dans la suite du texte la raison d'être de l'affirmation que vous êtes en train d'étudier). Pour vous aider à comprendre ce point très important, voici une comparaison. Si vous cherchiez à apprendre à jouer du piano, il serait évidemment indispensable que vous vous asseyiez et que vous vous entraîniez à jouer, en appuyant sur le clavier, avec vos doigts. Ecouter et regarder quelqu'un qui joue, ou recevoir des conseils de quelqu'un qui sait jouer, ne remplacera jamais votre pratique personnelle. Un corrigé d'un exercice de maths, c'est quelqu'un qui fait le travail devant vous. Regarder cette personne travailler ne suffira pas à ce que vous sachiez jouer le morceau par la suite. Il faut que vous reproduisiez chaque mouvement vous même, pour en comprendre les mécanismes et difficultés, et pour à terme savoir le faire. Quand vous lisez des mathématiques, ne vous contentez pas d'être spectateur, soyez toujours acteur.