Quelques conseils de travail en mathématiques avant la rentrée en MPSI

27 juin 2025

Félicitations et bienvenue en MPSI

Vous êtes sur le point de débuter 2 ou 3 années passionnantes, durant lesquelles vous allez découvrir les sciences à un niveau avancé, et préparer les concours d'entrée des écoles d'ingénieur. Vous allez être accompagné, dans un excellent cadre pédagogique, dans l'étude des mathématiques, de la physique-chimie et des autres disciplines. Vous allez aussi découvrir et largement développer votre capacité à travailler, de façon régulière, efficace et méthodique. La grande rigueur, les grandes capacités de compréhension, d'analyse et de synthèse, que vous allez développer en CPGE resteront pour vous des atouts majeurs, pour toute votre vie future, professionnelle et personnelle.

En MPSI, le programme de mathématiques s'appuie sur le programme de spécialité de terminale. En début de l'année, pour faire le point sur les acquis de chaque élève, un test de rentrée sera organisé en mathématiques. Pour réussir au mieux l'an prochain, au test de rentrée et par la suite, il est bon que vous soyez dès le 1er septembre au point sur un certain nombre de notions et savoir-faire fondamentaux. Ce document et ceux qui l'accompagnent ont été rédigés pour vous aider à faire quelques révisions cet été.

En attendant de vous rencontrer à la rentrée, je vous souhaite un excellent été.

Du travail pour cet été

Le test de rentrée portera sur les programmes de spécialité de première et de terminale. Il ne comportera aucune question relevant du programme de maths expertes en terminale. Il contiendra une majorité de questions calculatoires, et contiendra quelques questions nécessitant également un peu de raisonnement.

Le sujet du test de rentrée 2023 est ci dessous.

Utilisez le test de rentrée 2023 pour faire le point sur vos acquis et vos lacunes. Coupez le sujet en 2 à votre convenance, et prévoyez 3 heures pour chercher chacune des deux moitiés que vous aurez choisies.

A la fin de ce document, vous trouverez de éléments de correction de ce test de rentrée.

En fonction de ce que vous savez faire ou non, révisez les programmes de première et terminale. Travaillez notamment les questions calculatoires, en vous utilisant les cahiers de calcul présentés plus bas.

Pour ceux qui n'ont pas fait maths expertes, rattraper ce programme durant l'été n'est pas indispensable. Si vous avez envie de le faire, travaillez en priorité la trigonométrie (et les nombres complexes). Ils sont fondamentaux en mathématiques, et en physique et en SI.

Test de rentrée 2023

Exercice 1. Calculs élémentaires

1. Calculer $A = 2023 \times 2024$.
2. Développer $B = (x-y)^4$.
3. Simplifier $C = \dfrac{4-9\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}$.

   Mettre le résultat sous la forme $C = a + b\sqrt{5}$.
4. Simplifier $D = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}{1 - \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$.
5. Simplifier $P = \dfrac{6^2 \times 10^3 \times 15^{-1}}{2^6 \times 3^{-2} \times 5^3}$. *Mettre le résultat sous une forme* $2^a \times 3^b \times 5^c$.
6. Simplifier $E = \dfrac{e^{7x-2} \times \left(e^{2x}\right)^{-7}}{e^{7-2x} \times \left(e^{7x}\right)^{-2}}$. *Mettre le résultat sous une forme* e^{ax+b}.
7. Simplifier $L = \ln(21) - \ln(\sqrt{7}) + 2\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$. *Mettre le résultat sous une forme* $L = a\ln(3) + b\ln(7)$.
8. Simplifier $M = \ln\left(\sqrt{\exp\left(-\ln(e^4)\right)}\right)$.
9. Pour tout x réel, on pose $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$.

   Simplifier $g(x) = f\Big(f(x)\Big)$. *Mettre le résultat sous forme d'un quotient de polynômes et effectuer les simplifications naturelles entre numérateur et dénominateur.*

Exercice 2. Dérivées

Sans justifier étudier le domaine, sans justifier la dérivabilité, calculer la dérivée de chaque des fonctions définies ci dessous.

1. $a(x) = 2\sqrt{x} - 5x^2 + 3e^x - 4\ln(x)$.
2. $b(x) = 2\cos(x) + \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^3}$.
3. $c(x) = \sqrt{3x+2} + e^{7x-3} - \dfrac{1}{2x+5}$.
4. $d(x) = x^2\sin(x)$.
5. $e(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$.
6. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-7}$.
7. $g(x) = \dfrac{e^x+3}{e^{2x+1}}$.
8. $h(x) = \sin(x^4+1)$.
9. $i(x) = \sin^4(x) + 1$.
10. $j(x) = \Big(\sin(x)+1\Big)^4$.

Exercice 3. Etude de fonction

Pour tout x réel, on pose $f(x) = x - \sin(x)$.

1. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$ et justifier que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4. Montrer que f est convexe sur l'intervalle $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

6. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

7. Montrer que pour tout x réel positif, on a $\sin(x) \leq x$.

Exercice 4. **Trigonométrie**

En trigonométrie notamment, vous pouvez vous aider de schémas, bien lisibles, clairs et propres, pour mener vos raisonnements et rédiger vos réponses. Par exemple, vous pouvez tracer des cercles (au compas).

1. Donner la valeur de : $A = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $C = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Donner la valeur de : $D = \cos\left(\frac{2023\pi}{2}\right)$, $E = \sin\left(\frac{2023\pi}{6}\right)$.

3. (a) Déterminer tous les $a \in [-\pi, \pi]$ tels que $2\cos(a) + 1 = 0$.
   (b) Déterminer tous les $b \in [0, 4\pi]$ tels que $2\cos(b) + 1 = 0$.

4. (a) Déterminer tous les $x \in [0, 2\pi]$ tels que $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$.
   (b) Déterminer tous les $y \in [-\pi, 3\pi]$ tels que $\sin(y) \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 5. **Equations, inéquations**

1. (a) Résoudre le système $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$, d'inconnues a, b réelles.
   (b) Résoudre le système $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 2x^2 + y = 5 \end{cases}$, d'inconnues x, y réelles.
   (c) Résoudre le système $\begin{cases} u + w^2 = 2 \\ 2u + w^2 = 5 \end{cases}$, d'inconnues u, w réelles.

2. (a) Résoudre l'équation $t^2 = t + 12$, d'inconnue t réelle.
   (b) Résoudre l'équation $a = \sqrt{a} + 12$, d'inconnue a réelle.
   (c) Résoudre l'équation $e^{2b} = e^b + 12$, d'inconnue b réelle.
   (d) Résoudre l'équation $c = \sqrt{c + 12}$, d'inconnue c réelle.

3. Résoudre l'inéquation $\frac{x}{x+2} \geq \frac{1}{1-x}$ d'inconnue x réelle.

4. (a) Résoudre l'inéquation $y^2 \geq y + 12$, d'inconnue y réelle.
   (b) Résoudre l'inéquation $\ln^2(z) \geq \ln(z) + 12$, d'inconnue z réelle.
   (c) Résoudre l'inéquation $\ln(t^2) \geq \ln(t + 12)$, d'inconnue t réelle.

Exercice 6. **Suites, raisonnement par récurrence**

Toutes les réponses doivent être justifiées. Les questions 3 sont indépendantes des questions 2. Les résultats des questions 2 sont inutiles/hors sujet pour les questions 3. Même si vous bloquez à un certain point dans les questions 2, vous pouvez chercher et réussir les questions 3.

1. On pose $a = 1 - \sqrt{2}$.
   (a) Déterminer le signe de a.
   (b) Calculer (simplifier) : $b = a^2 - 2a + 1$.
2. On considère une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 1$.
   (a) Calculer x_1, x_2, x_3 et x_4.
   (b) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on appellera $P(n)$ l'affirmation suivante : "$x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$".
      i. L'affirmation $P(0)$ est elle vraie ou fausse ?
      ii. L'affirmation $P(1)$ est elle vraie ou fausse ?
      iii. L'affirmation $P(2)$ est elle vraie ou fausse ?
      iv. On note k un entier naturel fixé. Montrer que si l'affirmation $P(k)$ est vraie, alors l'affirmation $P(k+1)$ est également vraie.
      v. Quelle est la conclusion naturelle des résultats obtenus aux questions précédentes (les questions 2b i à iv) ?
   (c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle monotone ?
   (d) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle bornée ?
3. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 1 \end{cases}$.
   (a) En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $t^2 - 2t + 1 \geq t + 1$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 1 + u_n$.
   (d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4 + n$.
   (e) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle monotone ?
   (f) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle bornée ?
   (g) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a t elle une limite, et si oui laquelle ?

Exercice 7. **Primitives**

Sans justifier l'existence, sans préciser un intervalle de validité, calculer une primitive de chaque des fonctions définies ci dessous. *Pour tout calcul demandé : les étapes/justifications/explications doivent figurer sur votre copie et le résultat doit être encadré ou surligné.*

1. $a(x) = x^3 - x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$.
2. $b(x) = 2e^x + \dfrac{1}{x^2} - 3\cos(x)$.
3. $c(x) = e^{3x-1} - \dfrac{1}{7x-4} + \sin(2x+3)$.
4. $d(x) = (2x-7)e^{x^2-7x+2}$.
5. $e(x) = (2x+4).\left(x^2+4x+1\right)^3$.
6. $f(x) = \dfrac{2e^{2x+1}}{e^{2x+1}+3}$.
7. $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+3}}$.
8. $h(x) = \dfrac{4x^3+1}{(x^4+x+3)^2}$.

Exercice 8. **IPP, Intégrales et primitives**

Pour toute question : les justifications ou étapes doivent figurer sur votre copie et le résultat doit être encadré ou surligné.

1. (a) A l'aide d'une IPP, calculer $A = \displaystyle\int_0^1 te^{2t}dt$.

   (b) A l'aide d'une IPP, déterminer une primitive de la fonction u définie par $u(x) = \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout x réel, on pose $a(x) = x^2 + e^x$.

   (a) Déterminer toutes les primitives de a sur $\mathbb{R}$.

   (b) Combien de primitives A de a vérifient la condition $A(0) = 3$? S'il en existe, donner explicitement cette ou ces primitive(s).

   (c) On pose $b(x) = 3 + \displaystyle\int_0^x (t^2 + e^t)dt$.
   La fonction b est elle une des primitives de a ? Si oui, sans aucun calcul supplémentaire, déterminer une expression de $b(x)$, valable pour tout x réel.

3. On suppose que f, g sont deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées continues sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on pose $h(x) = \big(f \circ g\big)(x) = f\Big(g(x)\Big)$.

   (a) Rappeler la formule du cours qui permet d'exprimer la dérivée de h en fonction des dérivées de f, g.

   (b) Justifier que $h(2) - h(1) = \displaystyle\int_1^2 h'(t)dt$.

   (c) Justifier que $h(2) - h(1) = \displaystyle\int_{g(1)}^{g(2)} f'(t)dt$.

   (d) En déduire que $\displaystyle\int_1^2 f'\Big(g(t)\Big).g'(t)dt \;=\; \int_{g(1)}^{g(2)} f'(t)dt$.

Cahiers de calcul

Dans le cadre de l'UPS [1] ont été rédigé des "cahiers de calcul" destinés aux élèves de première (spécialité maths), aux élèves de terminale (spécialité maths et maths expertes) et aux élèves en début de première année de CPGE scientifique.

On y trouve des exercices calculatoires corrigés. Différentes fiches balayent les différents chapitres des programmes. Elles sont très bien construites et présentées, agréables à utiliser. Dans les cahiers pour le lycée, chaque fiche commence par quelques questions de calcul très simples pour vous échauffer, puis contient des questions de difficulté intermédiaire, et se termine par quelques questions un peu plus ambitieuses. Pour chaque question, un cadre-réponse est prévu. En fin de fiche se trouvent les réponses aux différentes questions, mélangées, dans le désordre. Et en fin de document, après les fiches, se trouvent les réponses aux questions et des corrections plus ou moins détaillées.

Ces documents sont à la fois disponibles gratuitement en ligne, et sont disponibles en librairie à des tarifs très raisonnables. Vous pouvez par exemple les télécharger sur le site de Colas Bardavid qui a coordonné leur rédaction. Pour les 3 cahiers de calcul : mathématiques spécialité en première, mathématiques spécialité en terminale et maths expertes en terminale, rendez-vous sur la page web `colasbd.github.io/cdc-lycee/`. Pour le cahier de calcul pour les élèves en début de prépa scientifique, rendez vous sur la page :
`https://colasbd.github.io/cdc/`.

1. L'association des professeurs de mathématiques et de physique en CPGE scientifiques

Eléments de correction du test de rentrée 2023

Exercice 1. **Calculs élémentaires**

1. **Calculer** $A = 2023 \times 2024$**.**

   On va utiliser la relation fondamentale : $(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by$. On a :

$$\begin{array}{rcl} A & = & 2023 \times 2024 \\ & = & 2000^2 + (23+24) \times 2000 + 23 \times 24 \\ & = & 4000000 + 94000 + 400 + 140 + 12 \\ & = & 4094552 \end{array}$$

2. **Développer** $B = (x-y)^4$**.**

   Si on connait la formule de Newton, on peut obtenir directement le résultat. On peut aussi le retrouver à partir de la formule pour $(a \pm b)^2$ et de la distributivité.

$$\begin{array}{rcl} (x-y)^4 & = & (x-y)^2.(x-y)^2 \\ & = & (x^2 - 2xy + y^2).(x^2 - 2xy + y^2) \\ & = & x^4 - 2x^3y + x^2y^2 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 + y^2x^2 - 2xy^3 + y^4 \\ & = & x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 \end{array}$$

3. **Simplifier** $C = \dfrac{4 - 9\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}$**.**

   On utilise la formule (quantité conjuguée) : $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$.

   On calcule :

$$C = \frac{(4 - 9\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})}{(9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})} = \frac{36 - (16 + 81)\sqrt{5} + 180}{81 - 16 \times 5} = 216 - 97\sqrt{5}.$$

4. **Simplifier** $D = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}}}{1 - \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}}$**.**

   On calcule

$$D = \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}}{1 - \dfrac{2}{5}} = \frac{7}{6} . \frac{5}{3} = \frac{35}{18}$$

5. **Simplifier** $P = \dfrac{6^2 \times 10^3 \times 15^{-1}}{2^6 \times 3^{-2} \times 5^3}$**.**

   On calcule

$$P = \frac{2^2\ 3^2\ 2^3\ 5^3\ 3^{-1}.5^{-1}}{2^6\ 3^{-2}\ 5^3} = 2^{2+3-6}\ 3^{2-1+2}\ 5^{3-1-3} = 2^{-1}\ 3^3\ 5^{-1}.$$

6. **Simplifier** $E = \dfrac{e^{7x-2} \times \left(e^{2x}\right)^{-7}}{e^{7-2x} \times \left(e^{7x}\right)^{-2}}$**.**

   On calcule :

$$E = e^{7x-2}\ e^{-14x}\ e^{2x-7}\ e^{14x} = e^{9x-9}.$$

7. **Simplifier** $L = \ln(21) - \ln(\sqrt{7}) + 2\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$**.**

   On calcule :

$$L = \ln(3) + \ln(7) - \frac{1}{2}\ln(7) + 2 \times \Big(-2\ln(3)\Big) = -3\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(7).$$

8. **Simplifier** $M = \ln\Big(\sqrt{\exp\big(-\ln(e^4)\big)}\ \Big)$**.**

   On calcule :
$$M = \ln\Big(\sqrt{\exp\big(-\ln(e^4)\big)}\ \Big) = \ln\Big(\sqrt{\exp\big(-4\big)}\ \Big) = \ln\Big(e^{-2}\Big) = -2$$

9. **Pour tout** x **réel, on pose** $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$**. Simplifier** $g(x) = f\Big(f(x)\Big)$**.**

   N'hésitez pas à décomposer un calcul un peu compliqué en plusieurs étapes.

   Par définition : $g(x) = \dfrac{f(x)+2}{f^2(x)+1}$.

   D'une part $f(x)+2 = \dfrac{x+2+2.(x^2+1)}{x^2+1} = \dfrac{2x^2+x+4}{x^2+1}$.

   D'autre part $\Big(f(x)\Big)^2 + 1 = \dfrac{(x+2)^2}{(x^2+1)^2} + \dfrac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+4x+4+x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+3x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$.

   Ainsi $g(x) = \dfrac{2x^2+x+4}{x^2+1} \cdot \dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+2x^2+4x+5} = \dfrac{(2x^2+x+4)(x^2+1)}{x^4+3x^2+4x+5} = \dfrac{2x^4+x^3+6x^2+x+4}{x^4+3x^2+4x+5}$

Exercice 2. **Dérivées**

Sans justifier étudier le domaine, sans justifier la dérivabilité, calculer la dérivée de chaque des fonctions définies ci dessous.

1. $\alpha(x) = 2\sqrt{x} - 5x^2 + 3e^x - 4\ln(x)$.

   $a'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 10x + 3e^x - \dfrac{4}{x}$.

2. $b(x) = 2\cos(x) + \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^3}$.

   On peut utiliser : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \Big(x^{-1/2}\Big)' = \dfrac{-1}{2}x^{-3/2} = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$.

   Et, de façon similaire : $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = \Big(x^{-3}\Big)' = -3x^{-4} = \dfrac{-3}{x^4}$.

   Ainsi $b'(x) = -2\sin(x) + \dfrac{-3}{2x\sqrt{x}} + \dfrac{6}{x^4}$.

3. $c(x) = \sqrt{3x+2} + e^{7x-3} - \dfrac{1}{2x+5}$.

   On sait que si (pour tout x) : $g(x) = f(ax+b)$, où a, b sont des constantes, alors $g'(x) = a.f'(ax+b)$.

   On obtient $c'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}} + 7e^{7x-3} + \dfrac{2}{(2x+5)^2}$.

4. $d(x) = x^2\sin(x)$.

   On sait que $\big(uv\big)' = u'v + uv'$. On obtient que

   $d'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x) = x(2\sin(x) + x\cos(x))$.

5. $e(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$.

   On sait que $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.

   Par conséquent $e'(x) = \dfrac{-1/x}{\ln^2(x)} = \dfrac{-1}{x\ln^2(x)}$.

6. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-7}$.

   Le plus simple est de commencer par simplifier : $f(x) = \dfrac{(x-7)+9}{x-7} = 1 + \dfrac{9}{x-7}$ avant de dériver. On peut aussi utiliser directement $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

   On trouve $f'(x) = \dfrac{1.(x-7) - (x+2).1}{(x-7)^2} = \dfrac{-9}{(x-7)^2}$.

7. $g(x) = \dfrac{e^x + 3}{e^{2x+1}}$.

   On pourrait utiliser $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Les propriétés de la fonction exponentielle permettent de simplifier le calcul.

   On a $g(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x+1}} + \dfrac{3}{e^{2x+1}} = e^{-x-1} + 3e^{-2x-1}$.

   Par conséquent, $g'(x) = -e^{-x-1} - 6e^{-2x-1}$.

   On peut revenir à un quotient si on le souhaite : $g'(x) = \dfrac{-e^x - 6}{e^{2x+1}}$.

8. $h(x) = \sin(x^4 + 1)$.

   On sait que $\Big(\sin(u(x))\Big)' = u'(x).\cos\big(u(x)\big)$.

   Ainsi $h'(x) = 4x^3.\cos(x^4 + 1)$.

9. $i(x) = \sin^4(x) + 1$.

   On sait que $\Big(u^4(x)\Big)' = 4u'(x)u^3(x)$.

   Donc $i'(x) = 4\cos(x).\sin^3(x)$.

10. $j(x) = \Big(\sin(x) + 1\Big)^4$.

    Comme à la question précédente, on obtient que $j'(x) = 4.\cos(x).\Big(\sin(x) + 1\Big)^3$.

Exercice 3. **Etude de fonction**

Pour tout x réel, on pose $f(x) = x - \sin(x)$.

1. **Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.**

   Soit x un réel. Alors $f(-x) = -x - \sin(-x) = -x + \sin(x) = -f(x)$.

   Par conséquent, f est impaire sur $\mathbb{R}$.

2. **Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$ et justifier que f est croissante sur $\mathbb{R}$.**

   Par opérations usuelles, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout x réel, $f'(x) = 1 - \cos(x)$.

   On sait que pour tout x réel : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

   Par conséquent, pour tout x réel : $f'(x) \geq 0$.

   Par conséquent, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. **Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.**

   On sait que l'équation de la tangente à la courbe de f en un point de coordonnées $(a, f(a))$ est :
   $y = f'(a).(x-a) + f(a)$.

   Ici $f(0) = 0 - 0 = 0$. Et $f'(0) = 1 - 1 = 0$.

   La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est la droite d'équation : $y = 0$. C'est l'axe des abscisses.

4. **Montrer que f est convexe sur l'intervalle $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.**

   La dérivée $f' : x \mapsto 1 - \cos(x)$ de f est dérivable (sur $\mathbb{R}$). La dérivée seconde de f est donnée par $f''(x) = \sin(x)$.

   Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, la fonction sinus est à valeurs positives.

   Autrement dit, pour tout x dans l'intervalle $[0, \pi/2]$, on a $f''(x) = \sin(x) \geq 0$.

   Par conséquent, la fonction f est convexe sur $[0, \pi/2]$.

5. **Déterminer la limite de f en $+\infty$.**

   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(x) \leq 1$. Par conséquent, pour tout x réel : $f(x) \geq x - 1$.

   On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$.

   Par comparaison (ou "encadrement", ou "théorème des gendarmes"), on obtient que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6. **Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.**

   Pour la limite en $-\infty$, 2 méthodes très naturelles : ou bien adapter la démarche utilisée à la question précédente, ou bien utiliser les résultats des questions 1 et 5. Je détaille la 2e option.

   On utilise les "=" ci dessous : la question 5 et une propriété de "calcul" sur les limites, la question 1, et une propriété de substitution dans les limites.

   $$-\infty = -\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} -f(t) = \lim_{t \to +\infty} f(-t) = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

   Finalement :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

7. **Montrer que pour tout x réel positif, on a $\sin(x) \leq x$.**

   On a montré que f est croissante sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $f(x) \geq f(0)$.

   C'est à dire que pour tout $x \geq 0$, $x - \sin(x) \geq 0$. Donc, pour tout x réel positif, on a $\sin(x) \leq x$.

Exercice 4. **Trigonométrie**

1. **Donner la valeur de : $A = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $B = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $C = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.**

   On n'hésite pas à s'aider du cercle trigonométrique.

   On "lit" sur le cercle que $A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $C = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. **Donner la valeur de : $D = \cos\left(\dfrac{2023\pi}{2}\right)$, $E = \sin\left(\dfrac{2023\pi}{6}\right)$.**

   Pour D, il faut calculer la division euclidienne de 2023 par 4. On remarque facilement que $2023 = 4 \times 500 + 23 = 4 \times 505 + 3$. Ainsi $\dfrac{2023\pi}{2} = 505 \times 2\pi + \dfrac{3\pi}{2}$. Et donc $D = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = 0$.

   De même, pour E, il faut effectuer la division euclidienne de 2023 par 12. Comme $505 = 3 \times 100 + 3 \times 70 - 5 = 3 \times 168 + 1$, on a $2023 = (3 \times 168 + 1) \times 4 + 3 = 12 \times 168 + 7$.
   Donc $E = \sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

3. (a) **Déterminer tous les $a \in [-\pi, \pi]$ tels que $2\cos(a) + 1 = 0$.**

   Pour tout $a \in [-\pi, \pi]$: $2\cos(a) + 1 = 0$ si et seulement si $\cos(a) = \dfrac{-1}{2}$.

   On "lit" sur le cercle que, dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, cette équation a deux solutions qui sont : $a_1 = \dfrac{-2\pi}{3}, a_2 = \dfrac{2\pi}{3}$.

   (b) **Déterminer tous les $b \in [0, 4\pi]$ tels que $2\cos(b) + 1 = 0$.**

   On voit le lien avec la question précédente.

   En parcourant l'intervalle $[0, 4\pi]$, on fait "2 fois le tour du cercle". Par conséquent, l'équation va avoir 4 solutions dans $[0, 4\pi]$. Deux solutions congrues à a_1 modulo 2π, et deux autres solutions congrues à a_2 modulo 2π.

   Il est clair que $-\pi < a_1 = \dfrac{-2\pi}{3} < 0 < a_2 = \dfrac{2\pi}{3} < \pi$.

   Par conséquent $\pi < a_1 + 2\pi = \dfrac{4\pi}{3} < 2\pi$ et $3\pi < a_1 + 4\pi = \dfrac{10\pi}{3} < 4\pi$.

   Et, de même, $2\pi < a_2 + 2\pi = \dfrac{8\pi}{3} < 3\pi$.

   Finalement, les 4 solutions de $2\cos(b) + 1 = 0$ dans $[0, 4\pi]$ sont : $b_1 = a_2 = \dfrac{2\pi}{3}, b_2 = a_1 + 2\pi = \dfrac{4\pi}{3}, b_3 = a_2 + 2\pi = \dfrac{8\pi}{3}$ et $b_4 = a_1 + 4\pi = \dfrac{10\pi}{3}$.

4. (a) **Déterminer tous les $x \in [0, 2\pi]$ tels que $\sin(x) \leq \dfrac{1}{2}$.**

   N'hésitez pas à vous aider d'un cercle trigonométrique (que ce soit pour chercher la question vous même, et/ou pour lire cette correction).

   En parcourant l'intervalle $[0, 2\pi]$, on va faire 1 fois le tour du cercle. On commence "à droite", au point de coordonnées $(1, 0) = \big(\cos(0), \sin(0)\big)$.

   On sait que $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/6) = \dfrac{1}{2}$ et que sin est croissante sur $[0, \pi/2]$. On "lit" sur le cercle une première partie de l'ensemble des solutions : l'intervalle $[0, \pi/6]$.

   Pour $x \in]\pi/6, 5\pi/6[$, on "lit" sur le cercle que $\sin(x) > \dfrac{1}{2}$.

   Ensuite, pour $x \in [5\pi/6, 2\pi]$, on lit encore sur le cercle que $\sin(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

   Finalement, les $x \in [0, 2\pi]$ tels que $\sin(x) \leq \dfrac{1}{2}$ sont les $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

   (b) **Déterminer tous les $y \in [-\pi, 3\pi]$ tels que $\sin(y) \leq \dfrac{1}{2}$.**

   N'hésitez pas à vous aider d'un cercle trigonométrique.

   En parcourant l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$, on va faire 2 fois le tour du cercle. On commence "à gauche", au point de coordonnées $(-1, 0) = \big(\cos(-\pi), \sin(-\pi)\big)$.

   On "lit" sur le cercle que pour tout $x \in [-\pi, 0]$, on a $\sin(x) \leq 0$. Tous les éléments de $[-\pi, 0]$ sont des solutions.

   Pour $x \in [0, 2\pi]$, on a résolu le problème dans la question précédente. Les solutions sont les éléments de l'ensemble : $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

   Pour $x \in [2\pi, 3\pi]$, on procède comme pour le 1er demi tour de cercle dans la question précédente. Pour $x \in [2\pi; 2\pi + \pi/6]$, on a $0 \leq \sin(x) \leq \dfrac{1}{2}$. Ensuite, pour $x \in]2\pi + \pi/6\,; 2\pi + 5\pi/6[$, on a $\sin(x) > \dfrac{1}{2}$. Enfin, pour $x \in [2\pi + 5\pi/6\,; 3\pi]$, on a $0 \leq \sin(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

   Finalement, les $y \in [-\pi, 3\pi]$ tels que $\sin(y) \leq \dfrac{1}{2}$ sont les éléments de l'ensemble :

$$
\begin{aligned}
&[-\pi, 0] \cup \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right] \cup \left[2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[2\pi + \frac{5\pi}{6}; 3\pi\right] \\
= \;\; &\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{6}; 3\pi\right].
\end{aligned}
$$

Exercice 5. **Equations, inéquations**

1. (a) **Résoudre le système** $\left\{\begin{array}{l} a+b=2 \\ 2a+b=5 \end{array}\right.$ **, d'inconnues** a, b **réelles.**

On peut, au choix, raisonner par équivalences ou raisonner par analyse-synthèse.

- En raisonnant par analyse synthèse.
  - Phase d'analyse.
    Imaginons que deux réels fixés a, b vérifient $\left\{\begin{array}{l} a+b=2 \\ 2a+b=5 \end{array}\right.$.
    Alors $3=5-2=(2a+b)-(a+b)=a$. Donc $a=3$. Et, avec $a+b=2$, on a $b=-1$.
    A ce stade, on a montré que le seul couple (a, b) qui peut éventuellement être solution du système est $(a, b)=(3,-1)$. On a montré que le système a au plus une solution, qui est le couple $(a, b)=(3,-1)$. A ce stade on sait que : si $(a, b)=(3,-1)$ est solution, alors le système a une unique solution (qui est celle là), et si $(a, b)=(3,-1)$ n'est pas solution, alors le système n'a aucune solution.
  - Phase de synthèse
    Il reste à savoir si le système a une solution ou n'en a aucune. Il suffit de déterminer si $(a, b)=(3,-1)$ est une solution ou n'est pas une solution.
    On calcule facilement : $\left\{\begin{array}{c} 3+(-1)=1 \\ 2\times 3+(-1)=5 \end{array}\right.$. Le couple $(a, b)=(3,-1)$ est une solution.
  - Conclusion
    Le système a une unique solution, qui est $(3,-1)$.
- En raisonnant par équivalences
  Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} a+b=2 \\ 2a+b=5 \end{array}\right. & \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} b=2-a \\ 2a+(2-a)=5 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=2-a \\ a=3 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-1 \\ a=3 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

  Par conséquent, le système a une unique solution, qui est $(3,-1)$.

(b) **Résoudre le système** $\left\{\begin{array}{l} x^2+y=2 \\ 2x^2+y=5 \end{array}\right.$ **, d'inconnues** x, y **réelles.**

Ne refaites pas les calculs faits dans la question précédente. Utilisez son résultat.

On a vu que (question précédente) que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $\left\{\begin{array}{l} a+b=2 \\ 2a+b=5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow (a, b)=(3,-1)$.

Par conséquent, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$
\left\{\begin{array}{l} x^2+y=2 \\ 2x^2+y=5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow (x^2, y)=(3,-1) \Longleftrightarrow \Big((x, y)=(\sqrt{3},-1) \text{ ou } (x, y)=(-\sqrt{3},-1)\Big).
$$

Le système $\left\{\begin{array}{l} x^2+y=2 \\ 2x^2+y=5 \end{array}\right.$ a deux solutions, données ci dessus.

(c) **Résoudre le système** $\left\{\begin{array}{l} u+w^2=2 \\ 2u+w^2=5 \end{array}\right.$ **, d'inconnues** u, w **réelles.**

Ne refaites pas les calculs faits dans la question a. Utilisez son résultat.

On utilise à nouveau le résultat de la question a.

Pour tout $(u, w) \in \mathbb{R}^2$:

$$
\left\{\begin{array}{l} u+w^2=2 \\ 2u+w^2=5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow (u, w^2)=(3,-1).
$$

Or, pour tout w réel, $w^2 \neq -1$.

Le système $\begin{cases} u + w^2 = 2 \\ 2u + w^2 = 5 \end{cases}$ n'a pas de solutions réelles.

2. (a) **Résoudre l'équation $t^2 = t + 12$, d'inconnue t réelle.**

   On peut utiliser Δ, ou passer par la forme canonique du trinôme.

   Quelle que soit la méthode choisie, on trouve que, pour tout t réel : $t^2 - t - 12 = (t+3)(t-4)$. Et l'équation $t^2 - t - 12 = 0$ a deux solutions réelles, qui sont $t = -3$ et $t = 4$.

   (b) **Résoudre l'équation $a = \sqrt{a} + 12$, d'inconnue a réelle.**

   Le mieux est probablement de raisonner par analyse synthèse, et d'utiliser la question précédente.

   - (Analyse) Supposons que a est une solution de $a = \sqrt{a} + 12$.
     Alors $a \geq 0$.
     Posons $b = \sqrt{a}$. Alors $a = b^2$. Et donc $b^2 = b + 12$.
     D'après la question précédente, ceci impose que $b = -3$ ou $b = 4$.
     Donc $\sqrt{a} = -3$ ou $\sqrt{a} = 4$.
     Avec a réel positif, $\sqrt{a} = -3$ est impossible.
     Avec a réel positif, $\sqrt{a} = 4$ impose que $a = 16$.
     A ce stade, on a montré que : s'il existe un réel a tel que $a = \sqrt{a} + 12$, alors ce réel vaut 16. On a montré qu'aucun autre nombre réel que 16 ne peut vérifier cette équation. On a montré que l'équation a au maximum une solution (ou bien une, ou bien aucune).
   - (Synthèse) Il reste à regarder si 16 est ou n'est pas solution du problème.
     On calcule facilement : $\sqrt{16} + 12 = 16$.
   - Conclusion : L'équation a une unique solution, qui est $a = 16$.

   (c) **Résoudre l'équation $e^{2b} = e^b + 12$, d'inconnue b réelle.**

   Même type de raisonnement que dans la question précédente.

   - Supposons que $b \in \mathbb{R}$ et $e^{2b} = e^b + 12$.
     Posons $x = e^b$. Alors $x^2 = x + 12$.
     D'après la question a, ceci impose que $x = -3$ ou $x = 4$.
     Donc $e^b = -3$ ou $e^b = 4$.
     Pour b réel, $e^b = -3$ est impossible.
     Pour b réel, $e^b = 4$ impose que $b = \ln(4)$.
     A ce stade, on a montré que $\ln(4)$ est le seul réel qui peut être solution de l'équation.
   - On calcule : $\exp(2\ln(4)) = \exp(\ln(4^2)) = 16 = 4 + 12 = \exp(\ln(4)) + 12$.
   - Finalement, l'équation a une unique solution, qui est $\ln(4)$.

   (d) **Résoudre l'équation $c = \sqrt{c + 12}$, d'inconnue c réelle.**

   Ici encore, raisonner par analyse synthèse est naturel et efficace.

   - Supposons que c soit un réel et que $c = \sqrt{c + 12}$.
     Alors $c \geq -12$.
     Et $c^2 = (\sqrt{c + 12})^2 = c + 12$.
     D'après la question a, ceci impose que $c = -3$ ou $c = 4$.
     A ce stade, on a montré que l'équation possède au plus 2 solutions : -3 et/ou 4.
   - D'une part $\sqrt{(-3) + 12} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$. Donc -3 n'est pas une solution de l'équation.
     D'autre part, $\sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$. Donc 4 est une solution de l'équation.
   - Finalement, l'équation a une unique solution réelle, qui est 4.

3. **Résoudre l'inéquation $\dfrac{x}{x+2} \geq \dfrac{1}{1-x}$ d'inconnue x réelle.**

   Faire des disjonctions de cas, selon le signe de $x + 2$ et le signe de $1 - x$ est possible mais n'est pas du tout efficace. Il vaut bien mieux vous organiser comme ci-dessous.

Pour tout x réel, différent de -2 et de 1 :

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+2} \geq \frac{1}{1-x} &\iff \frac{x}{x+2} - \frac{1}{1-x} \geq 0 \iff \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-1} \geq 0\\ &\iff \frac{x(x-1)+(x+2)}{(x+2)(x-1)} \geq 0\\ &\iff \frac{x^2+2}{(x+2)(x-1)} \geq 0.\end{aligned}$$

Pour tout x réel : $x^2+2>0$. De plus :

- pour tout $x<-2$, on a $(x+2)(x-1)>0$
- et pour tout $x \in]-2,1[$, on a $(x+2)(x-1)<0$,
- et pour tout $x>1$, on a $(x+2)(x-1)>0$.

Vous pouvez faire un tableau de signes si vous voulez.

Finalement, les x réels (différents de -2 et 1) tels que $\dfrac{x}{x+2} \geq \dfrac{1}{1-x}$ sont les éléments de l'ensemble $]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$.

4. (a) **Résoudre l'inéquation $y^2 \geq y+12$, d'inconnue y réelle.**
   On remarque le lien avec la question 2a. On a déjà trouvé que, pour tout y réel :
   $y^2-y-12=(y+3)(y-4)$.
   Ainsi, pour tout y réel :

$$\begin{aligned}y^2 \geq y+12 &\iff y^2-y-12 \geq 0\\ &\iff (y+3)(y-4) \geq 0\\ &\iff \Big(y \leq -3 \text{ ou } y \geq 4\Big)\\ &\iff y \in]-\infty,-3] \cup [4,+\infty[\end{aligned}$$

   (b) **Résoudre l'inéquation $\ln^2(z) \geq \ln(z)+12$, d'inconnue z réelle.**
   Pour que $\ln(z)$ soit défini, il est nécessaire (et suffisant) que z soit un réel strictement positif.
   D'après la question précédente, pour tout z strictement positif :

$$\ln^2(z) \geq \ln(z)+12 \iff \ln(z) \in]-\infty,-3] \cup [4,+\infty[$$

   Pour tout $z>0$, on a $\ln(z) \leq -3$ si et seulement si $z \in]0,e^{-3}]$.
   Pour tout $z>0$, on a $\ln(z) \geq 4$ si et seulement si $z \in [e^4,+\infty[$.
   Finalement, les z réels (strictement positifs) qui vérifient $\ln^2(z) \geq \ln(z)+12$ sont les éléments de l'ensemble

$$\Big]0\,;\,e^{-3}\Big] \cup \Big[e^4\,;\,+\infty\Big[.$$

   (c) **Résoudre l'inéquation $\ln(t^2) \geq \ln(t+12)$, d'inconnue t réelle.**
   On peut raisonner par analyse synthèse.

   - Supposons que t est un réel et que $\ln(t^2) \geq \ln(t+12)$.
     Alors $t^2>0$, c'est à dire $t \neq 0$. Et $t+12>0$, c'est à dire $t>-12$.
     Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, de $\ln(t^2) \geq \ln(t+12)$, on peut déduire que

$$t^2 = e^{\ln(t^2)} \quad \geq \quad t+12 = e^{\ln(t+12)}.$$

     D'après la question 4a, ceci impose que $t \in]-\infty,-3] \cup [4,+\infty[$.
     A ce stade, on a montré que si un réel t vérifie $\ln(t^2) \geq \ln(t+12)$ alors $t \in \big]-12,-3\big] \cup [4,+\infty[$.

- Il reste à étudier la réciproque. Chaque élément de $\big] -12, -3\big] \cup [4, +\infty[$ est il ou non solution de l'équation ?
  Soit $t \in \big] -12, -3\big] \cup [4, +\infty[$.
  Comme $t \in]-\infty, -3] \cup [4, +\infty[$, d'après la question a, on a $t^2 \geq t + 12$.
  De plus, $t \neq 0$ et donc $t^2 > 0$. Et $t + 12 > 0$.
  La fonction logarithme étant croissante sur $]0, +\infty[$, on obtient que $\ln(t^2) \geq \ln(t + 12)$.
- Conclusion :
  Les réels t tels que $\ln(t^2) \geq \ln(t + 12)$ sont les éléments de l'ensemble $\big] -12, -3\big] \cup [4, +\infty[$.

Exercice 6. **Suites, raisonnement par récurrence**

1. **On pose $a = 1 - \sqrt{2}$.**
   (a) **Déterminer le signe de a.**
   On a $2 > 1 \geq 0$ et donc $\sqrt{2} > \sqrt{1} = 1$. Donc $a < 0$.
   (b) **Calculer (simplifier) : $b = a^2 - 2a + 1$.**
   J'espère que vous n'avez pas injecté l'expression de a avant de développer.
   Mieux vaut connaitre ses identités remarquables de 1ere.
   Bien sûr : $b = (a-1)^2 = \Big(-\sqrt{2}\Big)^2 = 2$.

2. **On considère une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 1$.**
   (a) **Calculer x_1, x_2, x_3 et x_4.**
   On calcule : $x_1 = (x_0 - 1)^2 = b = 2$. Et $x_2 = (x_1 - 1)^2 = 1^2 = 1$. Et $x_3 = (x_2 - 1)^2 = 0^2 = 0$. Et $x_4 = (x_3 - 1)^2 = (-1)^2 = 1$.
   (b) **Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on appellera $P(n)$ l'affirmation suivante : "$x_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$".**
      i. **L'affirmation $P(0)$ est elle vraie ou fausse ?**
      $P(0)$ est l'affirmation : "$x_0 = \dfrac{1 + (-1)^0}{2}$", c'est à dire l'affirmation "$x_0 = 1$". Cette affirmation est fausse.
      ii. **L'affirmation $P(1)$ est elle vraie ou fausse ?**
      $P(1)$ est l'affirmation : "$x_1 = \dfrac{1 + (-1)^1}{2}$", c'est à dire l'affirmation "$x_1 = 0$". Cette affirmation est fausse.
      iii. **L'affirmation $P(2)$ est elle vraie ou fausse ?**
      $P(2)$ est l'affirmation : "$x_2 = \dfrac{1 + (-1)^2}{2}$", c'est à dire l'affirmation "$x_2 = 1$". Cette affirmation est vraie.
      iv. **On note k un entier naturel fixé. Montrer que si l'affirmation $P(k)$ est vraie, alors l'affirmation $P(k+1)$ est également vraie.**

      On a fixé un entier k positif quelconque.

      On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est à dire que l'égalité : $x_k = \dfrac{1 + (-1)^k}{2}$ est vraie.
      On sait que :
      - quand k est pair, $(-1)^k = 1$
      - quand k est impair, $(-1)^k = -1$.

      Par conséquent,
      - quand k est pair, $\dfrac{1 + (-1)^k}{2} = 1$
      - quand k est impair, $\dfrac{1 + (-1)^k}{2} = 0$.

Posons $f(t) = (t-1)^2$. On calcule facilement $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.
Vous savez que : si k est pair alors $k+1$ est impair, et si k est impair alors $k+1$ est pair.
Par conséquent, dans tous les cas (que k soit pair ou impair), on a

$$f\left(\frac{1+(-1)^k}{2}\right) = \frac{1+(-1)^{k+1}}{2}.$$

Or $x_{k+1} = x_k^2 - 2x_k + 1 = (x_k - 1)^2 = f(x_k)$.
Comme on a supposé que $x_k = \dfrac{1+(-1)^k}{2}$, on obtient que $x_{k+1} = \dfrac{1+(-1)^{k+1}}{2}$.
Conclusion : On a montré que : "si l'affirmation $P(k)$ est vraie, alors l'affirmation $P(k+1)$ est vraie".
Vous comprenez bien qu'on a démontré cette propriété pour toute valeur de k entière positive. On l'a démontrée aussi bien pour $k=0$, que pour $k=1$, pour $k=2$, $k=3$, etc. Plus formellement, on vient de prouver que $\forall k \in \mathbb{N}, \Big(P(k) \implies P(k+1)\Big)$. Vous pouvez dire que P est "héréditaire" si vous le souhaitez. Il faut surtout comprendre ce que cela veut dire. Le mot "héréditaire" n'est pas un mot magique.

v. **Quelle est la conclusion naturelle des résultats obtenus aux questions précédentes (les questions 2b i à iv) ?**

On a montré :
- que l'affirmation $P(2)$ est vraie,
- et que pour tout k entier supérieur à 2, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.

Par récurrence, on obtient que l'affirmation : "pour tout k entier supérieur à 2, $x_k = \dfrac{1+(-1)^k}{2}$" est vraie.

(c) **La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle monotone ?**
La réponse est non.
On a vu que $x_0 = 1-\sqrt{2} < 0 < x_1 = 2$. Ceci donne déjà que la suite (x_n) n'est pas décroissante.
De plus, $x_1 = 2 > x_2 = 1$. Donc la suite (x_n) n'est pas croissante.

(d) **La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle bornée ?**
La réponse est oui. On a obtenu aux questions précédentes que :
- $x_0 = 1-\sqrt{2}$, $x_1 = 2$
- et pour tout $k \geq 2$:
  - si k est pair alors $x_k = 1$
  - si k est impair alors $x_k = 0$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1-\sqrt{2} \leq x_n \leq 2$. La suite (x_n) est bornée.

3. **On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :** $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 1 \end{cases}$.

(a) **En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4$.**
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, appelons $A(n)$ l'affirmation : "$u_n \geq 4$".
- L'affirmation $A(0)$ est l'affirmation "$u_0 \geq 4$".
  Par hypothèse de l'exercice, on a $u_0 = 4$. Donc l'affirmation $A(0)$ est vraie.
- Soit n un entier naturel fixé.
  Imaginons que l'affirmation $A(n)$ soit vraie. Autrement dit : supposons que $A(n)$ est vraie. C'est à dire, supposons que $u_n \geq 4$.
  Alors $u_n - 1 \geq 3$. Et donc $(u_n - 1)^2 \geq 9$
  Or $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$. Donc $u_{n+1} \geq 9 \geq 4$.
  On vient de justifier que l'affirmation $A(n+1)$ est satisfaite.

- Dans l'étape ci dessus du raisonnement, nous avons montré que :
  pour tout entier naturel n, si l'affirmation $A(n)$ est vraie, alors l'affirmation $A(n+1)$ est vraie.

  La rédaction n'est pas l'aspect le plus délicat/problématique. Vous pouvez utiliser ou ne pas utiliser le mot "héréditaire", c'est indifférent. Vous devez comprendre le raisonnement, et rédiger d'une façon qui le montre. A lui tout seul, le mot "héréditaire" ne montre pas que vous avez compris le raisonnement.
- Conclusion de la récurrence :
  On a établi que $A(0)$ est vraie.
  On a aussi établi une infinité d'implications, qui sont toutes les implications $\big(A(n) \implies A(n+1)\big)$ pour tous les $n \in \mathbb{N}$.
  Sachant $A(0)$ vraie et sachant $(A(0) \implies A(1))$ vraie, on obtient que $A(1)$ vraie.
  A ce stade, avec $A(1)$ vraie et $(A(1) \implies A(2))$ vraie, on obtient que $A(2)$ vraie.
  A ce stade, avec $A(2)$ vraie et $(A(2) \implies A(3))$ vraie, on obtient que $A(3)$ vraie.
  A ce stade, avec $A(3)$ vraie et $(A(3) \implies A(4))$ vraie, on obtient que $A(4)$ vraie.
  Etc.
  C'est ça une récurrence.
  Par récurrence, on obtient que toutes les affirmations : $A(0), A(1), A(2), A(3), A(4), A(5), ...$ etc, sont vraies. On obtient que : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 4$.

(b) **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $t^2 - 2t + 1 \geq t + 1$.**
C'est un problème du second degré. Vous pouvez passer par Δ si vous voulez, vous pouvez faire un tableau de signes...
Pour tout t réel :

$$t^2 - 2t + 1 \geq t + 1 \iff t^2 - 3t \geq 0 \iff t(t-3) \geq 0 \iff \Big(t \leq 0 \text{ ou } t \geq 3\Big).$$

Les réels qui vérifient $t^2 - 2t + 1 \geq t + 1$ sont les $t \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$.

(c) **En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 1 + u_n$.**
De la question précédente, on peut déduire que pour tout $t \geq 3$, on a $t^2 - 2t + 1 \geq t + 1$.
On a montré à la question a que pour tout n entier naturel : $u_n \geq 4$.
Donc, pour tout n entier naturel : $u_n^2 - 2u_n + 1 \geq u_n + 1$.
C'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq 1 + u_n$.

(d) **En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4 + n$.**
On peut raisonner par récurrence.

- On a bien $u_0 = 4 \geq 4 + 0$. La propriété est vraie au rang 0.
- Soit n un entier naturel tel que $u_n \geq 4 + n$.
  D'après la question précédente, on sait que $u_{n+1} \geq 1 + u_n$. Ainsi $u_{n+1} \geq 1 + (4+n) = 4 + (n+1)$.
  Ceci montre que la propriété est héréditaire.
- Par récurrence simple, on a établi que pour tout n entier positif, $u_n \geq 4 + n$.

(e) **La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle monotone ?**
La réponse est oui.
On a montré ci dessus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq 1 + u_n$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

(f) **La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle bornée ?**
La réponse est non.
On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 4 + n$.
Vous savez que $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 4 = +\infty$.
Par comparaison (par "encadrement", ou "théorème des gendarmes"), on obtient que $\lim u_n = +\infty$.
Ceci interdit à la suite (u_n) d'être majorée. Par conséquent, elle ne peut pas être bornée.

(g) **La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a t elle une limite, et si oui laquelle ?**
Voir dans la question précédente. On a justifié que $\lim u_n$ existe et que $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 7. **Primitives**

Sans justifier l'existence, sans préciser un intervalle de validité, calculer une primitive de chaque des fonctions définies ci dessous.

1. $a(x) = x^3 - x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$.

   Il faut connaitre les dérivées usuelles sur le bout des doigts pour réussir à calculer des primitives. En cas de difficultés dans cet exercice, vérifiez que vous êtes parfaitement au point sur tous les calculs de dérivées.

   Par exemple : $A(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} - \ln(x)$.

   Bien sûr, pour vérifier une primitive que vous avez trouvée, c'est très simple : vous dérivez et vous vérifiez que vous retombez sur la fonction de départ.

2. $b(x) = 2e^x + \dfrac{1}{x^2} - 3\cos(x)$.

   Par exemple : $B(x) = 2e^x - \dfrac{1}{x} - 3\sin(x)$.

3. $c(x) = e^{3x-1} - \dfrac{1}{7x-4} + \sin(2x+3)$.

   Par exemple : $C(x) = \dfrac{1}{3}e^{3x-1} - \dfrac{1}{7}\ln(7x-4) - \dfrac{1}{2}\cos(2x+3)$.

   Vous avez ici besoin d'être à l'aise avec les dérivées composées, de la forme $\Big(u(ax+b)\Big)' = a.u'(ax+b)$.

4. $d(x) = (2x-7)e^{x^2-7x+2}$.
   Par exemple : $D(x) = e^{x^2-7x+2}$.

   Vous avez ici besoin d'être à l'aise avec les dérivées composées, de la forme $\Big(e^u\Big)' = u'.e^u$. *On reconnait une dérivée de cette forme dans d pour en déduire une primitive D.*

5. $e(x) = (2x+4).\big(x^2+4x+1\big)^3$.

   Par exemple : $E(x) = \dfrac{1}{4}\big(x^2+4x+1\big)^4$.

   Vous avez ici besoin d'être à l'aise avec les dérivées composées, de la forme $\Big(u^4\Big)' = 4.u'.u^3$. *On reconnait une dérivée de cette forme dans e pour en déduire une primitive E.*

6. $f(x) = \dfrac{2e^{2x+1}}{e^{2x+1}+3}$.
   Par exemple : $F(x) = \ln\left(e^{2x+1}+3\right)$.

   Vous avez ici besoin d'être à l'aise avec les dérivées composées, de la forme $\Big(\ln(u)\Big)' = \dfrac{u'}{u}$. *On reconnait une dérivée de cette forme dans f pour en déduire une primitive F.*

7. $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+3}}$.
   Par exemple : $G(x) = 2\sqrt{\sin(x)+3}$.

   Vous avez ici besoin d'être à l'aise avec les dérivées composées, de la forme $\Big(\sqrt{u}\Big)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. *On reconnait une dérivée de cette forme dans g pour en déduire une primitive G.*

8. $h(x) = \dfrac{4x^3+1}{(x^4+x+3)^2}$.

   Par exemple : $H(x) = \dfrac{-1}{x^4+x+3}$.

Vous avez ici besoin d'être à l'aise avec les dérivées composées, de la forme $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$. *On reconnait une dérivée de cette forme dans* h *pour en déduire une primitive* H.

Exercice 8. **IPP, Intégrales et primitives**

1. (a) **A l'aide d'une IPP, calculer** $A = \int_0^1 te^{2t}dt$.

   Les fonctions $f : t \mapsto t$ et $g : t \mapsto \frac{1}{2}e^{2t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et les dérivées $f' : t \mapsto 1$ et $g' : t \mapsto e^{2t}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} A = \int_0^1 te^{2t}dt &= \int_0^1 f(t)g'(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(t)g(t)dt \\ &= \left[\frac{t}{2}e^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2t}dt \\ &= \frac{1}{2}e^2 - 0 - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{e^2+1}{4} \end{aligned}$$

   (b) **A l'aide d'une IPP, déterminer une primitive de la fonction** u **définie par** $u(x) = \ln(x)$ **sur** $\mathbb{R}_+^*$.

   La fonction $\ln = u$ est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$. Le réel $a = 1$ appartient à cet intervalle.
   D'après le théorème fondamental de l'analyse (ou théorème fondamental du calcul intégro-différentiel),

   la fonction $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \ln(t)dt \end{array}$ est une primitive de u sur $\mathbb{R}_+^*$.

   L'exercice nous demande de trouver ici une expression de $h(x)$ ne faisant par intervenir de symbole intégral $\int$, et ce en utilisant une intégration par parties.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $f : t \mapsto t$ et $g : t \mapsto \ln(t)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées $f' : t \mapsto 1$ et $g' : t \mapsto \frac{1}{t}$ continues sur cet intervalle. Par intégration par parties :

$$h(x) = \int_1^x f'(t)g(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_1^x - \int_1^x f(t)g'(t)dt = \Big(x\ln(x) - 1.\ln(1)\Big) - \int_1^x 1.dt = x\ln(x) - (x-1).$$

   Une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $h : x \mapsto x\ln(x) - x + 1$. Une autre primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $h_2 : x \mapsto x\ln(x) - x$.

2. **Pour tout** x **réel, on pose** $a(x) = x^2 + e^x$.

   (a) **Déterminer toutes les primitives de** a **sur** $\mathbb{R}$.

   Vous devez rédiger un minimum vos réponses. Faire des phrases.

   Une primitive est la fonction $A : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + e^x$.
   La fonction a admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$.
   Pour toute constante C, fixée antérieurement (indépendamment de x), la fonction
   $B_C : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + e^x + C$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}$.
   Et toutes les primitives de a sur $\mathbb{R}$ sont de la forme donnée ci dessus. Si f est une primitive de a sur $\mathbb{R}$, alors il existe une constante D (fixée avant/indépendamment de x) telle que pour tout x réel : $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + e^x + D$. Cette constante D dépendant de la primitive f choisie.

(b) **Combien de primitives A de a vérifient la condition $A(0) = 3$? S'il en existe, donner explicitement cette ou ces primitive(s).**
D'après un résultat du cours de terminale, parmi toutes les primitives de a, une et une seule vérifie la condition $A(0) = 3$.
On peut déterminer concrètement cette primitive.
Fixons une constante réelle C. (C'est à dire : C est un nombre qui ne dépendra pas de x.) Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3+e^x+C$. Cette fonction vérifie $f(0) = 1+C$. On aura $f(0) = 3$ si et seulement si $C = 2$.
Finalement, parmi toutes les primitives de a sur $\mathbb{R}$, la seule qui vérifie $A(0) = 3$ est la fonction $A : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + e^x + 2$.

(c) **On pose $b(x) = 3 + \int_0^x (t^2 + e^t)dt$.**
La fonction b est elle une des primitives de a ? Si oui, sans aucun calcul supplémentaire, déterminer une expression de $b(x)$, valable pour tout x réel.
La fonction a est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et la constante 0 appartient à cet intervalle. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \int_0^x (t^2 + e^t)dt$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, b est une primitive de a sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a $b(0) = 3 + \int_0^0 a(t)dt = 3 + 0 = 3$.
D'après la question précédente, une seule fonction est à la fois primitive de a sur $\mathbb{R}$ et donne pour image 3 à 0. La fonction b est cette fonction. La fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^2 + e^x + 2$. Finalement, pour tout x réel, $b(x) = \frac{1}{3}x^3 + e^x + 2$.

3. **On suppose que f, g sont deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées continues sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on pose $h(x) = \big(f \circ g\big)(x) = f\Big(g(x)\Big)$.**

(a) **Rappeler la formule du cours qui permet d'exprimer la dérivée de h en fonction des dérivées de f, g.**
D'après le cours de terminale, pour tout x réel : $h'(x) = g'(x) \times f'\Big(g(x)\Big) = g'(x) \times \big(f' \circ g\big)(x)$.

(b) **Justifier que $h(2) - h(1) = \int_1^2 h'(t)dt$.**
Par opérations usuelles, la fonction h' est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction h est une primitive de sa dérivée, sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, si a, b sont deux réels, alors $\int_a^b h'(t)dt = \Big[h(t)\Big]_a^b = h(b) - h(a)$.
En particulier, $\int_1^2 h'(t)dt = h(2) - h(1)$.

(c) **Justifier que $h(2) - h(1) = \int_{g(1)}^{g(2)} f'(t)dt$.**
Par définition de la fonction h, on a : $h(2)-h(1) = f\Big(g(2)\Big) - f\Big(g(1)\Big)$. On utilise la même propriété que dans la question précédente. La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f est une primitive de sa dérivée sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.
En particulier, pour $a = g(1)$ et $b = g(2)$, on obtient l'égalité demandée.

(d) **En déduire que $\int_1^2 f'\Big(g(t)\Big).g'(t)dt = \int_{g(1)}^{g(2)} f'(t)dt$.**
Il suffit de combiner les résultats des questions précédentes. On a établi que

$$\int_1^2 g'(t) \times f'\Big(g(t)\Big)dt = \int_1^2 h'(t)dt = h(2) - h(1) = \int_{g(1)}^{g(2)} f'(t)dt.$$